Lehrbuch
der angewandten Mathematik.

Erstes Bändchen

das System der Statik enthaltend;

bearbeitet

von

D. C. L. Lehmus,
Dr. der Philosophie.

Berlin, 1818.
In der Realschulbuchhandlung.

152. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

So viel Vorzügliches auch die neueren Lehrbücher der Statik von Langsdorf, Eytelwein, Ide, Brandes, enthalten, so scheint mir doch in wissenschaftlicher Hinsicht noch manches zu wünschen übrig. Die Behandlung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, die, der Theorie des Gleichgewichts, wenn Kräfte nach verschiedenen Richtungen in verschiedenen Ebenen in ein festes System von Puncten wirken, überhaupt die Anordnung und Ausführung des ganzen Lehrgebäudes befriedigt nicht immer, wenigstens nicht ganz, insofern noch manches unberührt geblieben ist. Der Verfasser, der als Privatlehrer bald 15 Jahr täglich 8 oder auch 9 Stunden mathemathische Vorlesungen an zahlreiche Versammlungen hält, und wenigstens jährlich 2 oder 3mal die Statik vorzutragen Gelegenheit hat, bearbeitete gegenwärtiges System zum Gebrauch bei seinen Vorträgen, und hofft, wenn es ein größeres Publicum finden sollte, eine nachsichtige Aufnahme.

Er hat sich bemüht, die möglichste Vollständigkeit zu erreichen, und glaubt sein Ziel, wenigstens nicht ganz, verfehlt zu haben. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist in den 4 verschiedenen Abschnitten jedesmal insbesondere behandelt, um den Lernenden allmählig damit vertraut zu machen; nothwendig war dies nicht, denn der Beweis im 4ten Abschnitt ist wohl allgemein gültig. Im 2ten Abschnitt sind die beiden Drehachsen unter einem beliebigen Winkel genommen, also schiefwinklichte Coordinaten zur Festsetzung der Angriffspuncte der Kräfte gebraucht; im 4ten Abschnitt wurden gleich rechtwinklichte Coordinaten gewählt, um die Beweise zu erleichtern, die ohnedem mit einigen Weitläuftigkeiten verbunden sind. Wo sphärisch-trigonometrische Formeln nöthig waren, hat der Verfasser, um das doch immer unangenehme Nachschlagen unnöthig zu machen, die kurze Herleitung derselben vorgezogen. Wenn die Aufnahme dieser Bogen den Wünschen des Verfassers entspricht, so wird das folgende Bändchen möglichst bald erscheinen und die Geostatik enthalten.

Berlin, im Nov. 1817.

Der Verfasser.

Allgemeine Grundbegriffe.

§. 1. Das Bestreben jedes Körpers in dem Zustand zu verbleiben, in welchen er sich befindet, heißt sein Beharrungsvermögen, oder auch zuweilen, jedoch uneigentlich, seine Trägheit.

Jedes Vermögen, einen Beharrungszustand aufzuheben, oder auch nur aufheben zu wollen, heißt Kraft.

§. 2. Jede Orts-Aenderung eines Punctes heißt seine Bewegung; der Gegensatz ist Ruhe. Die Bewegung eines Punctes in Beziehung auf einen andern ruhenden, heißt seine absolute Bewegung; relativ heißt sie in Beziehung auf einen andern ebenfalls bewegten Punct.

§. 3. Jede Bewegung ist entweder

1stens gleichförmig, wenn der bewegte Punct in gleichen auf einander folgenden Zeiten immer einen gleichgroßen Weg durchläuft.

2tens ungleichförmig, wenn dieß nicht der Fall ist.

Die ungleichförmige Bewegung kann entweder beschleunigt oder verzögert sein. Beschleunigt heißt sie, wenn die von Anfang an, in gleichen auf einander folgenden Zeiten, durchlaufenen Wege, immer größer werden; verzögert, wenn sie fortwährend abnehmen. Erfolgt die Beschleunigung oder die Verzögerung nach einem unveränderlichen Gesetz, so heißt die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte; ist aber das Gesetz veränderlich, so heißt sie ungleichförmig beschleunigt und ungleichförmig verzögert.

§. 4. Unter Geschwindigkeit versteht man das Verhältniß der Größe der Wege zweier bewegten Puncte in gleichen Zeiten. Als Zeit-Einheit soll die Secunde angenommen werden, und wenn daher ein gleichförmig bewegter Punct in jeder Secunde c Fuß durchläuft, so sagt man: er hat c Fuß Geschwindigkeit. Bezeichnet man daher den Weg, welchen er in t Secunden zurücklegt, mit h, so durchläuft er den Weg c, tmal, d. h. es ist $h = t.c.$

Bei ungleichförmiger Bewegung versteht man, mit Beibehaltung der Secunde als Zeit-Einheit, unter Geschwindigkeit eines Punctes in irgend einer Stelle a seiner Bahn, den Weg, welchen derselbe in der folgenden Secunde zurücklegen würde, wenn er seine in diesem Punct a stattfindende Bewegung gleichförmig fort-

setzte. Absolute und relative Geschwindigkeit unterscheiden sich eben so wie absolute und relative Bewegung. Wenn sich nemlich etwa zwei Puncte p und q von a aus in einerlei Richtung gleichförmig eine Secunde lang bewegen, so wird, wenn p den Weg c; q den Weg v durchläuft; c die absolute Geschwindigkeit von p; v die von q sein. Ist nun $c > v$ so ist in Beziehung auf q; $c - v$ die relative Geschwindigkeit von p; und $-(c-v)$ die relative Geschwindigkeit von q in Beziehung auf p.

§. 5. Eine Kraft heißt absolut, wenn ihre Einwirkung auf einen Punct unabhängig von dem Zustand der Ruhe oder Bewegung desselben ist; relativ wenn sie auf einen ruhenden anders als auf einen bewegten wirkt; unveränderlich absolut, wenn sie in jeden Punct des Raums ihre Wirkung in gleicher Stärke äußert; veränderlich absolut, wenn dies nicht der Fall ist.

§. 6. Wenn ein Punct a durch einen andern Punct b verhindert wird, eine Bewegung anzufangen, welche eine auf ihn einwirkende Kraft hervorzubringen strebt, so heißt die Wirkung, welche a und b aufeinander äußern, ein Druck.

Wenn aber a schon in Bewegung ist ehe der widerstehende Punct b ihm in den Weg tritt und zwingt, diese Bewegung, ganz oder auch nur zum Theil aufgeben, so heißt die Einwirkung, welche in diesem Fall a und b aufeinander äußern, ein Stoß.

§. 7. Die Vergleichung eines Drucks mit einem andern nach einer angenommenen Einheit, heißt Gewicht. Die Einheit soll durchaus der bekannte Begriff Pfund sein. Die Vergleichung eines Stoßes mit einem andern nach einer angenommenen Einheit heißt Bewegungsvermögen. Die Einheit soll durchaus der Stoß sein, welchen ein Pfund, welches sich mit einer Geschwindigkeit von einem Fuß gleichförmig bewegt, auf einen ruhenden Widerstand äußert. Man könnte diese Einheit ein Stoßpfund nennen.

§. 8. Das Bestreben jedes Körpers, sich dem Mittelpunct unserer Erde zu nähern, rührt von einer (den Erfahrungen gemäß) veränderlichen absoluten Kraft her, welche die Schwere heißt; die Richtung nach welcher sie wirkt, heißt die lothrechte oder verticale, und die welche einen rechten Winkel mit ihr bildet, die wagerechte oder horizontale.

Der Cubic-Inhalt eines Körpers oder der Raum, welchen derselbe einnimmt, heißt sein Volumen. Der Cubicfuß soll unsere gewöhnliche Einheit sein.

Die Summe der materiellen Theile eines Körpers heißt seine Masse. Für diesen Begriff ist es, wie die Folge zeigen wird, nicht nothwendig, eine Einheit festzusetzen.

§. 9. Das Verhältniß der Massen zweier Körper von gleichen Volumen, heißt ihre Dichtigkeit.

Das Verhältniß der Gewichte (insofern der Druck

§. 6. von der Schwere herrührt) zweier Körper von gleichen Volumen heißt ihr specifisches oder eigenthümliches Gewicht.

Das Gewicht des destillirten Regenwassers ist die gebräuchliche Vergleichungseinheit; wenn man daher sagt: ein Körper A hat das specifische Gewicht β, so heißt dieß: er wiegt β mal so viel, als ein gleiches Volumen Wasser. Hat daher der Körper A das Volumen V, und es wiegt ein Cubicfuß Wasser γ ℔ (im Mittel ist $\gamma = 66$); so ist das Gewicht des Körpers A, oder P gleich $V \beta \gamma$.

§. 10. Je mehr Masse ein Körper hat, desto dichter ist er, und desto mehr materielle Theile setzt er den Einwirkungen der Schwere aus; daher ist das Verhältniß der Massen zweier Körper von gleichen Volumen, dem ihre Dichtigkeiten, und dem ihrer eigenthümlichen Gewichte gleich. Hat daher ein Körper das specifische Gewicht β, d. h. verhält sich sein Gewicht zu dem eines gleichen Raumes Wasser $= \beta : 1$; so ist auch das Verhältniß der Massen, so wie das der Dichtigkeiten $= \beta : 1$.

§. 11. Unter einer festen Linie, festen Ebene, so wie unter einem festen System von Puncten, verstehe man durchaus eine solche Verkettung von geometrischen (also gewichtlosen) Puncten, welche entweder alle in eine geometrische Linie fallen, oder in einer geometrischen Ebene liegen, oder im Raum nach verschiedenen

Richtungen vertheilt sind, aber alle so untereinander zusammenhängen, daß ihre gegenseitige Lage durchaus absolut unverrückbar ist, wenn auch die ganze Zusammensetzung ihren Ort ändert.

§. 12. Jede Kraft, welche auf ein festes System von Puncten wirkt, hat das Bestreben, dieses System in ihrer Richtungslinie fortzubewegen, also dem in unendlicher Entfernung liegenden Endpunct dieser Richtungslinie näher zu bringen, und dieser Endpunct soll das Ziel der Kraft heißen.

Von Kräften, deren Richtungslinien alle parallel unter einander sind, kann man also sagen: sie streben alle zu demselben Ziel; oder im Fall sie theilweis einander entgegenwirken; sie streben zu entgegengesetzten Zielen.

§. 13. Wenn Kräfte ein festes System von Puncten zu irgend einem Ziel zu bringen streben, und irgend ein Umstand verhindert diese Bewegung, aber nicht jede, so erfolgt unter allen möglichen Bewegungen diejenige, bei welcher das angegriffene System von Puncten in einem und denselben Zeitraum sich dem Ziel der thätigen Kräfte am meisten nähert.

§. 14. Wenn Kräfte auf ein festes, frei im Raum schwebendes System von Puncten wirken, und dasselbe bleibt demohnerachtet in ebendenselben Zustand der Ruhe oder Bewegung, in welchen es sich befand, ehe

diese Kräfte einwirkten, so sagt man: diese Kräfte stehen unter einander im vollkommenen Gleichgewicht. Ist das System ruhend und bleibt in Ruhe, so hat man ein Gleichgewicht für den Ruhestand, ist es in Bewegung und bleibt in derselben Bewegung, so hat man ein Gleichgewicht während der Bewegung.

§. 15. Wenn Kräfte auf ein festes, frei im Raum schwebendes System von Puncten wirken, und nicht untereinander im vollkommenen Gleichgewicht stehen, sondern das System nach irgend einer Richtung fortbewegen, so kann man den Fall annehmen, daß diesem fortgehenden Bewegen des Systems ein Hinderniß in den Weg tritt, welches die Bewegung nicht ganz verhindert, aber ihre Natur verändert, sie nemlich zu einer drehenden Bewegung um dieß Hinderniß umformet. Jede solche drehende Bewegung hat aber für jeden Augenblick ihrer Dauer eine Achse, welche sich nicht dreht, sondern um welche das System sich dreht, und eine solche Achse soll eine Drehachse heißen.

§. 16. Es läßt sich aber der Fall denken, daß eine solche Drehachse an so einer Stelle dem festen System als Hinderniß in den Weg tritt, für welche wohl Bestreben der Kräfte zur Drehung statt findet, aber kein Erfolg, indem eben so viel Thätigkeit zur Drehung nach der einen Richtung als zu der, nach entgegengesetzter Richtung sich äußert. In einem sol-

chen Fall sagt man: jene auf das feste System von Puncten wirkenden Kräfte stehen untereinander im unvollkommenen Gleichgewicht, denn eigentlich bringen sie untereinander allein das Gleichgewicht nicht hervor, sondern in Verein mit der durch das Hinderniß, als gegenwirkende Kraft, erzeugten Drehachse.

§. 17. Wenn also Kräfte in einem festen System von Puncten wirken, und man denkt sich irgendwo in diesem System eine Drehachse und es erleidet diese gar keine Einwirkung und erfolgt auch keine Drehung um sie, so sind die Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht; wenn aber auch keine Drehung um diese Achse, jedoch eine Einwirkung auf sie erfolgt, so sind die Kräfte untereinander im unvollkommenen Gleichgewicht; erfolgt aber eine Drehung, mag die Achse eine Einwirkung erleiden oder nicht, so findet gar kein Gleichgewicht unter den Kräften statt.

§. 18. Wenn Kräfte in einem System von Puncten wirken, welches nur drehende Bewegung um irgend eine (etwa durch ein Hinderniß erzeugte) Dehachse, aber keine fortgehende annehmen kann, mag übrigens die Drehachse eine Einwirkung erleiden oder nicht; so heißt das System ein Hebel; diejenige Linie aber, welche normal auf der Drehachse und zugleich auch normal auf der Richtungslinie einer Kraft steht, heißt der Hebelsarm dieser Kraft in Beziehung

auf diese Drehachse, und das Product aus einer Kraft in ihren Hebelsarm heißt: das statische Moment dieser Kraft ebenfalls in Beziehung auf diese Drehachse.

§. 19. Wenn eine Kraft A, deren Richtungslinie durch R ausgedrückt sein soll, in irgend einen Punct a eines festen Systems angreift, und es wird durch irgend eine Thätigkeit das feste System verrückt, ohne daß jedoch das Ziel der Kraft A ein anderes wird, so wird dadurch a diesem Ziel näher gekommen sein oder sich von ihm entfernt haben, oder noch eben so weit wie vorher von ihm abstehen. Ist nun die Verrückung eine fortgehende und man nennt den Punct, in welchen A jetzt wirkt, b; das Ziel der Kraft aber z; so ist die Größe der Annäherung ans Ziel $= az - bz$ und diese Größe bestimmt sich, wenn man von b auf R eine Normale fällt, welche R in c treffen mag, durch den Abstand ac. Das Product A. ac heißt dann das mechanische Moment der Kraft A in Beziehung auf Bestreben zu dieser fortgehenden Bewegung.

Wenn aber das System durch irgend eine Thätigkeit zu einer Drehung um irgend eine Drehachse l gereizt würde, und man bezeichnet den Drehungswinkel um die Achse l mit φ, den Hebelsarm der Kraft A in Beziehung auf l mit h, so beschreibt der Punkt a wo h und R sich schneiden einen Kreisbogen $= \frac{\varphi}{360} 2 h \pi$ (wo π die bekannte Zahl 3,1415... ausdrückt), und

es wird, wie vorhin, die Normale vom Endpunct n dieses Bogens auf R die Größe der Annäherung ans Ziel, auf R, von a aus, abschneiden. Setzt man nemlich: diese Normale schnitte R in c, so ist ac die erwähnte Annäherung, und das Product A. ac heißt ebenfalls das mechanische Moment der Kraft A, aber in Beziehung auf Bestreben zur Drehung um die Achse l.

§. 20. Wenn zwei oder mehrere Kräfte auf einen Punct oder auf ein System von Puncten wirken, und diese Kräfte stehen untereinander nicht im Gleichgewicht, so daß also das System nicht in seinem gehabten Zustand der Ruhe oder Bewegung verbleibt, sondern in irgend einen andern übergeht, so heißt eine solche Kraft, welche, wenn sie ganz allein wirkte, unter denselben Umständen und bei denselben zufälligen Hindernissen vollkommen dasselbe leisten würde, die mittlere jener Kräfte, und sie heißen in Beziehung auf die mittlere, Seitenkräfte.

Wenn also etwa ein System von Puncten von Kräften angegriffen wird, und diese ertheilen denselben eine fortgehende Bewegung, oder im Fall, irgend ein Hinderniß, etwa eine der Kräfte selbst, diese zum Theil hemmte, ein drehende, um irgend eine entstehende Drehachse, so ist unter der mittleren Kraft diejenige zu verstehen, welche, allein thätig unter denselben Umständen, auch vollkommen dieselbe Bewegung dem System mittheilen würde.

§. 21. Wenn zwei oder mehrere Kräfte, welche auf einen Punct oder auf ein System von Puncten wirken, einander nicht im Gleichgewicht erhalten, so heißt diejenige Kraft, welche, wenn sie noch im System angebracht wird, das Gleichgewicht hervorbringt, die entgegengesetzt mittlere Kraft. Sind also Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, so ist jede die entgegengesetzt mittlere der übrigen.

§. 22. Die Lehre von den Bedingungen, welche statt finden müssen, wenn zwei oder mehrere Kräfte untereinander Gleichgewicht erhalten sollen, heißt die Statik. Die Anwendung der Gesetze der Statik auf das Gleichgewicht fester Körper untereinander heißt Geostatik; und auf das Gleichgewicht flüßiger Körper unter sich und mit festen Körpern, Hydrostatik.

§. 23. Wirken mehrere, nicht mit einander im Gleichgewicht stehende Kräfte, auf einen Punkt oder auf ein System von Punkten, so heißt ihre mittlere Kraft, die Ueberwucht oder bewegende Kraft.

§. 24. Die Mechanik lehrt die Größe der Aenderungen des Zustandes der Ruhe oder Bewegung, so wie die aus diesen Aenderungen entspringenden Wirkungen bestimmen, welche entstehen, wenn ein Punct oder ein System von Puncten von Kräften angegriffen wird, welche unter sich nicht im Gleichgewicht stehen. Ihre Anwendung auf feste Körper heißt Geo-

mechanik, auf flüßige Hydrodynamik oder Hydraulik.

§. 25. Die Lehre, welche statische und mechanische Untersuchungen bei luftförmigen Materien anstellt, heißt Pneumatik, und insbesondere heißt der Theil derselben, welcher es blos mit unserer atmosphärischen Luft zu thun hat, Aerometrie.

§. 26. Jede Vorrichtung, bei welcher eine Kraft einen zu überwindenden Widerstand nicht unmittelbar, sondern mittelbar ergreift, heißt eine Maschine. Die Maschinenlehre hat es mit Anordnungen solcher Maschinen zu bestimmten Zwecken und mit Bestimmung der erforderlichen Kräfte zu Ueberwindung der Widerstände in bestimmten Zeiten zu thun.

Die Statik.

§. 27. **Lehrsatz.** Wenn in einer geraden festen Linie ab in irgend einem Punct c (*Fig. 1.*) derselben nach der Richtung cb eine Kraft = P, wirkt und in denselben oder irgend einen andern Punct d dieser Linie eine eben so große Kraft P, nach der entgegengesetzten Richtung, also nach da strebend angebracht wird, so findet ein vollkommenes Gleichgewicht statt.

Beweis 1) Wollte man annehmen, die erste Kraft P näherte die Linie ab, ihrem Ziel in irgend einem Zeitpunct um ein Stück = e; so würde, wenn man cf = e macht, der Punct c zu Ende des Zeitpuncts in f sein.

2) Es ist aber vollkommen eben so viel Grund für die Annahme da, daß die andere Kraft P in denselben Zeitpunct den Punct d, also auch die Linie ab ihrem Ziel um dasselbe Stück e näher gebracht habe. Macht man daher cg = e; so müßte c zu Ende jenes Zeitpuncts zugleich in f und auch in g sein, welches aber ein Widerspruch ist.

3) Die Linie ab bleibt also, wenn beide Kräfte wirken, unverrückt in ihrer Lage; es erhalten also beide untereinander ein vollkommenes Gleichgewicht.

§. 28. Folgerung. Es ist also vollkommen gleichgültig, in welchen Punct ihrer Richtungslinie man den Angriffspunct der Kraft annimmt, denn ihr Bestreben kann in jedem Fall nach dem vorigen §. durch eine und dieselbe Gegenwirkung in einen und denselben Punct nach einer und derselben Richtung thätig, vernichtet werden.

§. 29. Lehrsatz. Wenn in einem frei im Raum schwebenden festen System von Puncten, Kräfte nach parallelen Richtungslinien wirkend, theils zu einem Ziel z, theils zu einem entgegengesetzten z′ streben, so nähert sich das System keinem von beiden Zielen, wenn die Differenz dieser Kräfte, oder was dasselbe sagt: wenn die algebraische Summe derselben, gleich Null ist.

Beweis. Derselbe Grund, welcher für die Annahme, es entstünde eine Annäherung, zu z statt findet, findet auch für die Annahme einer Annäherung zu z′ statt; es müßten also, im Fall einer entstehenden Bewegung, dem Streben der Kräfte gemäß, beide Annäherungen zu gleicher Zeit erfolgen, welches unmöglich ist; daher erfolgt keine von beiden.

§. 30. Lehrsatz. Wenn in einem frei im Raum schwebenden festen System von Puncten, Kräfte nach parallelen Richtungslinien wirken, und es findet zu keinem der beiden Ziele eine Annäherung statt, so muß die algebraische Summe der Kräfte = 0 sein.

Beweis. Wollte man annehmen, die algebraische Summe der Kräfte wäre nicht gleich 0; so würde das

Bestreben zu dem einen Ziel größer sein als zu dem entgegengesetzten; dann würde aber auch eine Annäherung zu ersterem erfolgen müssen, und dies widerspricht der Voraussetzung.

§. 31. Lehrsatz. Wenn zwei Kräfte P und Q in einer festen Ebene so wirken, daß ihre Richtungslinien sich in irgend einem Punct a schneiden, so muß die Richtungslinie ihrer mittleren Kraft ebenfalls durch a gehen.

Beweis. Nach §. 28 kann man sich sowohl P als Q in a angreifend denken; es wird also das gemeinschaftliche Bestreben von P und Q darinnen bestehen, den Punct a in irgend einer Richtung zu bewegen, oder im Fall ein Widerstand statt findet, bewegen zu wollen, und diese Richtung ist dann die der mittleren Kraft, welche also durch a gehen muß.

§. 32. Folgerungen.

I. Wenn zwei Kräfte in einem festen System wirkend, welches frei im Raum schwebt, einander im Gleichgewicht erhalten, so müssen beide

1stens gleich groß sein.

2tens in eine Richtungslinie fallen.

3tens zu entgegengesetzten Zielen streben.

II. Wenn 3 Kräfte in einem festen System, welches frei im Raum schwebt, nach nicht parallelen Richtungslinien wirkend, einander im Gleichgewicht erhalten, so müssen ihre Richtungslinien sich alle 3 in einem und denselben Punct schneiden, und in eine Ebene fallen.

III. Wenn also n Kräfte untereinander ein vollkommenes Gleichgewicht erhalten, so fällt die mittlere von n — 1 solchen Kräften mit der entgegengesetzt mittleren derselben in eine Richtungslinie, und hat mit ihr einerlei Größe; denn sind n Kräfte thätig, und man nimmt n — 1 derselben fort, und denkt sich dafür ihre mittlere wirkend, so bleibt noch Gleichgewicht, aber nur zwischen 2 Kräften, welche also in Hinsicht ihrer Lage und Größe den Bedingungen in I entsprechen müssen. §. 21.

§. 33. Grundsatz. Wenn mehrere Kräfte in einem festen System wirkend untereinander Gleichgewicht erhalten, und man fügt zu diesen Kräften in dasselbe System noch mehrere hinzu, oder nimmt mehrere hinweg, welche zugefügten oder weggenommenen aber auch untereinander im Gleichgewicht stehen, so erhält sich das Gleichgewicht.

§. 34. Lehrsatz. Wenn eine geometrische feste Kreisebene nur um eine unverrückbare feste Achse drehbar ist, welche durch den Mittelpunct des Kreises geht, und seine Ebene normal trifft, und es wirkt in irgend einem Punct a der Peripherie nach der Richtung der Tangente eine Kraft = P, und in irgend einem andern Punct b dieser Peripherie ebenfalls nach der Richtung der Tangente eine gleichgroße Kraft = P aber mit dem Bestreben, die entgegengesetzte Drehung hervorzubringen, so findet gar keine Drehung statt, d. h. die beiden Kräfte P und P stehen untereinander im unvollkommenen Gleichgewicht.

Beweis. Derselbe Grund, welcher für die Annahme: es entstünde Drehung nach der einen Richtung, statt findet, findet auch für die entgegengesetzte Drehung statt, daher müßten, wenn eine erfolgt, auch beide zugleich erfolgen, welches unmöglich ist.

§. 35. Folgerung. Es ist also gleichgültig, in welchem Punct der Peripherie einer nur um ihre Achse beweglichen festen Kreisebene nach der Richtung der Tangente eine und dieselbe Kraft angreift, um Drehung nach einerlei Richtung hervorzubringen.

§. 36. Wenn Kräfte in einem festen System von Puncten wirken, so können in Hinsicht der Lage ihrer Richtungslinien folgende 4 Fälle statt finden:

1stens, die Richtungslinien sind alle parallel und liegen sämmtlich in einer Ebene.

2tens, sie sind parallel, liegen aber in verschiedenen Ebenen.

3tens, sie sind nicht parallel und liegen in einer Ebene.

4tens, sie sind nicht parallel und liegen in verschiedenen Ebenen.

Hienach folgen nun vier Abschnitte, welche die jedesmaligen Bedingungen des Gleichgewichts, sowohl des vollkommenen, als des unvollkommenen bestimmen.

Erster Abschnitt.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts parallel wirkender Kräfte, welche mit ihren Richtungslinien alle in eine und dieselbe feste Ebene fallen.

Des ersten Abschnitts erste Abtheilung.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts dreier in einer Ebene parallel wirkender Kräfte.

---

§. 37. **Lehrsatz.** Wenn in einer festen Linie a c (*Fig.* 2.) ein Punct b so angenommen wird, daß ab = bc ist, und es wirken in a und c nach parallelen Richtungen zu einerlei Ziel die Kräfte A und C; in b aber nach paralleler Richtung, mit denen der Kräfte A und C, zum entgegengesetzten Ziel eine Kraft = B, so findet ein vollkommenes Gleichgewicht statt, wenn C = A, und B = 2A ist, oder

Behauptung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Voraussetzungen.

1) ab = bc
2) C = A
3) B = 2A.

Beweis. Es muß gezeigt werden

1stens, daß keine fortgehende Bewegung erfolgen kann.

2tens, daß keine Drehachse, wo man auch eine im System sich denkt, eine Einwirkung erleidet.

3tens, daß um keine solche Drehachse eine Drehung erfolgt.

1stens, Es ist vermöge den Voraussetzungen,

$$A = A$$
$$-B = -2A$$
$$C = A$$

also $A + (-B) + C = 0$.

folglich findet auch nach §. 29 zu keinem der beiden Ziele eine Annäherung statt, und da nach keiner andern Richtung ein Bestreben sich äußern kann, als nach denen beiden entgegengesetzten, nach welcher die Kräfte wirken, so findet also

1stens keine fortgehende Bewegung statt, und

2tens keine Drehachse, wo man auch im System sich eine denken mag, erleidet eine Einwirkung.

2tens, Wollte man annehmen, es erfolgte eine Drehung um irgend eine Achse, welche die Ebene der Richtungslinien in irgend einem Punct rechts oder links der Richtung von B normal schneidet, so würde ein Theil der Linie ac sich dem Ziel von A und C nähern, ein anderer Theil, den man sich auch = 0 denken kann, würde sich ihm entfernen, und beide Theile würden von ungleicher Größe sein, so daß also die

ganze feste Linie ac dem einen Ziel näher gekommen sein würde. Dies ist aber nach dem ersten Theil des Beweises nicht möglich; folglich kann also keine solche Drehung um eine solche Achse statt finden.

3tens, Daß endlich keine Drehung um eine Achse, welche durch die Richtung von B gehend, die Ebene normal trifft, erfolgen kann, ergiebt sich unmittelbar wie §. 34.

Es wird also

3tens um keine Achse eine Drehung statt finden.

§. 38. Zusatz. Da nach §. 32 die mittlere Kraft mit der entgegengesetzt mittleren einerlei Größe hat und mit ihr, aber entgegengesetzt wirkend, in eine und dieselbe Richtungslinie fällt, so folgt also aus dem vorigen §.

Wenn zwei gleichgroße Kräfte parallel zu einerlei Ziel wirken *(Fig. 2.)* so ist ihre mittlere Kraft doppelt so groß wie jede einzelne, und ihre Richtungslinie liegt in der Mitte zwischen jenen. Es ist also auch in Hinsicht jedes möglichen Erfolges ganz gleichgültig, ob man A nach der Richtung $a\alpha$ und $C = A$ nach der parallelen Richtung $c\gamma$, oder ob man $ab = bc$ macht, und eine Kraft $= 2A$ nach der parallelen Richtung $b\beta$ (nicht βb) wirken läßt.

§. 39. Lehrsatz. Wenn man eine gerade feste Linie in n gleiche Theile theilt, und denkt sich in der Mitte jedes dieser n Theile nach parellelen Richtungen zu einerlei Ziel ein Kraft $= p$ wirkend, so ist die mittlere aller dieser n Kräfte $= np$ und ihre Rich-

tungslinie geht durch die Mitte jener Linie zu demselben Ziel.

Beweis. Man denke sich die gleichen Kräfte p paarweis in gleichen Abständen von der Mitte, so ist für jedes Paar die mittlere nach §. 38, = 2p in der behaupteten Richtung. Ist daher n gerade = 2. m; so hat man m Paare, und es ist ihre mittlere Kraft in der behaupteten Richtung = m. 2p = np.

Ist aber n ungerade = 2m + 1, so hat man m Paare, und ihre mittlere Kraft ist = 2m p; addirt man hiezu die eine noch übrige Kraft p, welche schon in der behaupteten Richtung liegt, so hat man also die mittlere aller n Kräfte = m 2p + p = (2m + 1) p = np.

§. 40. Zusatz. Wenn man also eine gerade feste Linie in n gleiche Theile theilt, und denkt sich in der Mitte jedes dieser n Theile eine Kraft = p, alle parallel zu einerlei Ziel wirken, in der Mitte jener Linie aber zum entgegengesetzten Ziel eine Kraft = np, so findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

§. 41. Lehrsatz. Wenn zwei Kräfte A und B parallel zu einerlei Ziel wirken, so ist ihre mittlere M der Summe beider gleich; ihre Richtungslinie läuft parallel mit jenen in derselben Ebene, und befindet sich an einer solchen Stelle, für welche die normalen Abständen derselben von den Richtungslinien der Kräfte A und B, nemlich ma, mb, sich umgekehrt wie diese Kräfte verhalten, oder

Behauptungen. 1) M = A + B

2) die Richtungslinie von M, A und B laufen parallel in einer Ebene.

3) ma : mb = B : A

Voraussetzung. A und B wirken parallel zu einerlei Ziel, und M bedeutet ihre mittlere Kraft.

Beweis.

1stens. Das Verhältniß von A und B in ganzen Zahlen ausgedrückt sei = $\alpha : \beta$; so daß also, wenn man sich unter W irgend eine Krafteinheit denkt

$$A = \alpha W$$

$$B = \beta W$$

gesetzt werden kann.

2tens. Man ziehe eine gerade Linie normal durch die Richtungslinien der beiden Kräfte A und B, und nehme A und B in den Schneidungspuncten a und b als thätig an (§. 28.); theile dann ab in $\frac{\alpha + \beta}{2}$ gleiche Theile, von welchen jeder = t sein mag, mache $ad = \frac{\alpha}{2} t$, also $bd = \frac{\beta}{2} t$; ferner in der Verlängerung von ab; ac = ad; und bf = bd; so wird $cd = \alpha . t$; $df = \beta t$; und also $cf = (\alpha + \beta) t$.

3tens. Nun denke man sich die Kräfte A und B weggenommen, und bringe dafür in der Mitte jedes der $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$ gleichen Theile von $\left\{ \begin{matrix} c \text{ bis } d \\ d \text{ bis } f \end{matrix} \right\}$ eine Kraft = 1. W zu demselben Ziel thätig an, so erleidet der Erfolg nicht die geringste Aenderung. §. 39. 20.

4tens. Man hat also nun in gleichen Abständen auf der ganzen Linie cf vertheilt, lauter gleichgroße, parallel zu einerlei Ziel thätige Kräfte, von welchen

jede = 1. W ist. Die mittlere derselben, die dann also zugleich auch die mittlere Kraft zu A und B ist, wird folglich nach §. 39

$$= (\alpha + \beta)\,W = \alpha W + \beta W$$
$$= A + B$$

sein, und ihre Richtungslinie wird cf in seiner Mitte, in m, wenn man cm = mf macht, normal schneiden, wodurch die Richtigkeit der beiden ersten Behauptungen dargethan ist.

5tens. Weil nun m in der Mitte von cf liegt, so ist $cm = \frac{\alpha + \beta}{2}$ t; es ist aber nach 2) ca = ad = $\frac{\alpha}{2}$ t; also cm — ca oder ma = $\frac{\beta}{2}$. t Eben so ergiebt sich mb = $\frac{\alpha}{2}$. t; und folglich

$$ma : mb = \beta : \alpha; \text{ oder}$$
$$ma : mb = \beta W : \alpha W \text{ oder}$$
$$ma : mb = A : B$$

welches die Behauptung ist.

§. 42. Zusatz. Findet zwischen A und B keine gemeinschaftliche Einheit statt, so etwa, daß wenn α und β ganze Zahlen bedeuten, φ aber einen ächten, jedoch irrationalen Bruch ausdrückt;

$$A = \alpha W$$
$$B = (\beta + \varphi)\,W \text{ ist}$$

so kann man doch durch einen ächten rationalen Bruch $\frac{p}{q}$ dem wahren Werth von φ desto näher kommen, je größer man p und q annimmt; ist dann beinahe $\frac{p}{q} = \varphi$; so hat man vollständig $A = \alpha W = \alpha q . \frac{W}{q}$; und beinahe $B = (\beta + \frac{p}{q})\,W = (\beta q + p)\,\frac{W}{q}$;

also in Beziehung auf die sehr kleine gemeinschaftliche Einheit $\frac{W}{q}$; ebenfalls beinahe $A : B = \alpha q : \beta q + p$.

Da nun dieser Art Annäherung keine Grenzen zu setzen sind, und das Verhältniß $\alpha q : \beta q + p$ dem $A : B$ desto näher kommt, je größer man p und q wählt, um den Werth von φ durch $\frac{p}{q}$ immer vollkommner zu erreichen, so kann man also auch solche Werthe für p und q sich denken, für welche die Differenz zwischen φ und $\frac{p}{q}$ kleiner wird, wie jede noch so kleine Größe, d. h. unendlich klein oder Null; für solche Werthe von p und q ist dann für jede Rechnung vollständig

$$A : B = \alpha q : \beta q + p,$$

und weil hierin sowohl αq als $\beta q + q$ ganze Zahlen ausdrücken, so bleibt also auch in einem solchen Fall der Beweis im vorigen §. gültig.

§. 43. Lehrsatz. Wenn M die mittlere Kraft zu den parallel wirkenden Kräften A und B beziehet, so daß also

$$M = A + B \ (\textit{Fig. 3.}) \text{ und}$$

$$ma : mb = B : A \text{ ist; } (\text{§. 41.})$$

so ist auch in Beziehung auf jede Achse l das statische Moment von M gleich der Summe der statischen Momente von A und B; oder wenn die Hebelsarme von A, B und M in Beziehung auf l mit $'a$, $'b$ und $'m$ bezeichnet werden, so hat man die

Behauptung. $'mM = {}'aA + {}'bB$; und die

Voraussetz. 1) $M = A + B$

2) $ma : mb = B : A$.

Beweis. Gesetzt die Achse l träfe die Ebene, worinnen die Richtungslinien der Kräfte liegen, normal in den Punkt π, so daß also im Fall eine drehende Bewegung um l entstünde, π der eigentliche Drehungspunct (Hypomochlium) sein würde, und man zieht aus π eine Normale durch die Richtungslinien der Kräfte A; B; M; und bezeichnet die Schneidungspuncte mit a; b; m; so hat man $\pi a = {}'a$; $\pi b = {}'b$; $\pi m = {}'m$; und $ma = m\pi - a\pi = {}'m - {}'a$; $mb = b\pi - m\pi = {}'b - {}'m$; setzt man nun diese Werthe für ma und mb in die zweite Voraussetzung, so entsteht aus ihr

$$'m - {}'a : {}'b - {}'m = B : A;$$

und hieraus folgt

$$'m\,(A + B) = {}'aA + {}'bB;$$

Wird nun zufolge der ersten Voraussetzung M für A + B gesetzt, so hat man

$$'mM = {}'aA + {}'bB$$

wie zu beweisen war.

§. 44. Zusatz. Leicht folgt auch, wenn blos die beiden Gleichungen

$$M = A + B \text{ und}$$

$$'mM = {}'aA + {}'bB$$

gegeben sind, daß auch in Beziehung auf jeden Drehungspunct in der Ebene, worinnen die Richtungslinien der Kräfte liegen, das statische Moment von M (*Fig.* 3.) gleich der Summe des statischen Momente von A und B ist. Nimmt man etwa den Punct π', zieht durch π' eine Normale durch die Richtungs-

linien der Kräfte, und bezeichnet die Schneidungspuncte mit a'; m'; b'; so hat man

$$\pi' a' - \pi a = \pi' m' - \pi m = \pi' b' - \pi b.$$

Setzt man nun diese unveränderliche Differenz $= e$, und multiplicirt

$$M = A + B \text{ mit } e;$$

so entsteht

$$eM = eA + eB;$$

und addirt man hinzu

$${}'mM = {}'aA + {}'bB;$$

so ergiebt sich

$$(e + {}'m)\,M = (e + {}'a)\,A + (e + {}'b)\,B; \text{ oder}$$

$$\pi' m'.\,M = \pi' a'.\,A + \pi' b'.\,B.$$

§. 45. Lehrsatz. Das statische Moment einer Kraft bestimmt die Größe ihres Bestrebens, das System, worinnen sie wirkt, um den Drehpunkt zu drehen, auf welchen sich das Moment bezieht.

Beweis. Die beiden Gleichungen

$$M = A + B \text{ und}$$

$${}'mM = {}'aA + {}'bB$$

bestimmen M als eine Kraft in einer solchen Stelle thätig, daß ihre Wirkung unter allen Umständen vollkommen dieselbe ist, als wenn man A und B wirken ließe. Es können aber die Kräfte A und B dem festen System nur Bestreben zu fortgehender Bewegung nach ihrem Ziel und im Fall irgend ein Hinderniß diese nicht gestattete, drehende Bewegung um irgend einen sich bildenden Drehpunct mittheilen. Da nun aber M allein thätig dasselbe leistet, was A und B ver-

vereint leisten würden, und die Gleichung $M = A + B$ die Quantität von M bestimmt, damit M eben so viel auf fortgehende Bewegung wirkt als A und B; die Gleichung $'m M = 'a A + 'b B$ aber 'm also die Stelle festsetzt, wo M wirken muß; diese Stelle aber in Beziehung auf fortgehende Bewegung ganz gleichgültig ist, so muß die Gleichung $'m M = 'a A + 'b B$ sich blos auf Einerleiheit einer möglichen drehenden Bewegung beziehen.

Es verwandelt sich aber eben diese Gleichung, wenn man π in a annimmt, in folgende:

$$am.\ M = ab.\ B$$

und dies heißt: die Kraft M in m wird in Beziehung auf den Drehpunct a die Ebene oder das System in derselben Zeit um denselben Winkel drehen, als die Kraft B in b; wenn

$$am.\ M = ab.\ B \text{ ist.}$$

Das statische Moment ist also die Verhältnißzahl für die Größe des Bestrebens zu drehender Bewegung um die Achse, oder den Drehpunct, in Beziehung auf welche oder welchen das Moment gebildet, d. h. der Hebelsarm zu verstehen ist.

§. 46. Zusatz. Es ist also in Beziehung auf drehende Bewegung um irgend einen Drehpunct π einerlei, ob man die Kraft A am Hebelsarm 'a oder die Kraft Z am Hebelsarm 'z wirken läßt, wenn

$$'a A = 'z Z; \text{ d. h. wenn } Z = \frac{'a}{'z} A \text{ ist.}$$

Dies Geschäft heißt das Reduciren einer Kraft von einem Hebelsarm auf einen andern.

§. 47. Lehrsatz. Wenn drei Kräfte, A, B, C, parallel in einer festen Ebene wirken, zwei derselben, etwa A und B zu einem Ziel; die 3te C aber zum entgegengesetzten, und man bezeichnet in Beziehung auf irgend einen Punct π in dieser festen Ebene die Hebelsarme von A, B, C mit $'a$, $'b$, $'c$, so erhalten diese Kräfte untereinander ein vollkommenes Gleichgewicht, wenn

1) $C = A + B$

2) $'cC = 'aA + 'bB$ ist; oder

Behauptung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Voraussetzungen.

1) $C = A + B$

2) $'cC = 'aA + 'bB$.

Beweis. Bezeichnet M die mittlere Kraft zu A und B; so hat man nach den bisherigen Lehren

$M = A + B$ und

$,mM = 'aA + 'bB$

Aus diesen Gleichungen und den Voraussetzungen folgt

$C = M$ und

$'c = 'm$;

also ist C mit der mittleren Kraft zu A und B von einerlei Größe, fällt mit ihr in eine und dieselbe Richtungslinie und wirkt entgegengesetzt, so daß also nach §. 27 vollkommenes Gleichgewicht erfolgt, also kein Punct der Ebene, wenn man sich in ihm eine Drehachse denkt, eine Einwirkung erleidet, auch keine Drehung um ihn statt finden wird.

§. 48. Zusatz. Nimmt man die Kraft B weg, und bringt dafür eine andere D in der Entfernung 'd von ϖ an, von der Größe, welche die Formel $D = \frac{'b B}{'d}$ bestimmt, so wird zwar nun auch keine Drehung um ϖ sich erzeigen (§ 46) allein ϖ wird nun eine Einwirkung erleiden, indem jetzt

$$C \text{ nicht} = A + D \text{ ist.}$$

Die Kräfte C, A, D werden also eine feste Drehachse in ϖ erfordern, also nur im unvollkommenen Gleichgewicht mit einander stehen.

Das Reduciren kann also nur in Beziehung auf eine feste Drehachse erfolgen, welche der Einwirkung, die sie erleidet, widerstehen kann, indem das vollkommene Gleichgewicht dadurch allemal aufgehoben wird.

Des ersten Abschnitts zweite Abtheilung.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer in einer festen Ebene, nach parallelen Richtungslinien wirkender Kräfte.

Bemerkung. Von jetzt an sollen alle Kräfte, als zu einerlei Bestreben thätig, alle Linien und Winkel als nach einer und derselben Richtung gemessen, in den Gleichungen aufgenommen werden, so daß diese durchaus nur positive Größe erhalten können. Jede besondere Aufgabe, so wie der Calcul wird dann bestimmen oder ergeben, welche der Größen negativ sind.

Bezeichnungen in dieser Abtheilung.

Δ drücke die feste Ebene aus.

ϖ einen beliebigen Punct in ihr.

l eine Achse, welche Δ in ϖ normal schneidet.

A; B; C u. s. w. die Größe der Kräfte.

A'; B'; C' u. s. w. ihre Richtungslinien.

,l eine Linie durch π in △ gezogen, welche A'; B' u. s. w. (*Fig.* 4.) normal schneidet.

a; b; c u. s. w. die Durchschnittspuncte von A'; B' u. s. w. mit ,l.

'a; 'b; 'c u. s. w. die Hebelsarme von A; B u. s. w. in Beziehung auf l oder π; also die Abstände πa; πb; πc u. s. w.

$a_{,}$; $b_{,}$; $c_{,}$ u. s. w. die Anfangsgeschwindigkeiten der Linien A'; B' u. s. w. im Fall △ eine augenblickliche Ortsveränderung erleiden würde.

(B); (C); . . . . . . (Y) die mittleren Kräfte zu A; B; zu (B); C; und endlich zu (X); (Y).

('b); ('c); . . . . . . ('y) die zugehörigen Hebelsarme in Beziehung auf π.

---

§. 49. Lehrsatz. Was auch A; B u. s. w. und a; b; c u. s. w. bedeuten mögen, wenn

$A + B + C + \ldots\ldots = o$ und

$aA + bB + cC + \ldots\ldots = o$ ist,

so bleibt letztere Gleichung auch dann noch gültig, wenn auch alle die Größen a; b; c u. s. w. um gleichviel, etwa um ϱ wachsen; oder

Behauptung.

$(a+\varrho) A + (b+\varrho) B + \ldots\ldots = o$

Voraussetzungen.

1) $A + B + C + \ldots\ldots = o$

2) $aA + bB + cC + \ldots\ldots = o$

Beweis. Man multiplicire 1 mit ϱ; so entsteht

$$\varrho A + \varrho B + \ldots\ldots = 0;$$

hiezu addire man 2; so ergiebt sich

$$(\varrho + a) A + (\varrho + b) B + \ldots\ldots = 0$$

wie zu beweisen war.

§. 50. Lehrsatz. Die mittlere Kraft zu mehreren parallel in einer Ebene wirkenden Kräften ist gleich der algebraischen Summe derselben, und ihr Hebelsarm bestimmt sich durch den Quotienten aus der algebraischen Summe der statischen Momente derselben, durch die algebraische Summe der Kräfte, oder

Behauptung.

1) $(Y) = A + B + \ldots\ldots + Y$

2) $('y) = \frac{'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY}{A + B + \ldots\ldots + Y}$

Voraussetzung. Die Kräfte A; B; .... Y wirken nach parallelen Richtungen in Δ.

Beweis. Es ist nach §. 43

$(B) = A + B$, und $('b)(B) = 'aA + 'bB$;

$(C) = (B) + C$; und $('c)(C) = ('b)(B) + 'cC$;

$(D) = (C) + D$; und $('d)(D) = ('c)(C) + 'dD$;

u. s. w. endlich

$(Y) = (X) + Y$ und $('y)(Y) = ('x)(X) + 'yY$.

Substituirt man nun die vorhergehenden Werthe immer in die folgenden Gleichungen, so entsteht

$(C) = A + B + C$;

$('c)(C) = 'aA + 'bB + 'cC$; ferner

$(D) = A + B + C + D$;

$('d)(D) = 'aA + 'bB + 'cC + 'dD$

u. s. w. endlich

$$(Y) = A + B + C + \ldots\ldots + Y$$

$$('y)(Y) = 'aA + 'bB + 'cC + \ldots\ldots + 'yY$$

und dividiret man nun die letzte Gleichung durch die vorhergehende, so folgt

$$('y) = \frac{'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY}{A + B + \ldots\ldots + Y}$$

§. 51. Lehrsatz. Wenn mehrere parallel wirkende Kräfte A, B, ... Y, Z in △ thätig sind, und es ist ihre algebr. Summe = 0 und zugleich die algebr. Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf l = 0; so sind diese Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, oder

Behauptung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Voraussetzungen.

1) $A + B + \ldots\ldots + Y + Z = 0$

2) $'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY + 'zZ = 0$

Beweis I. Es muß aus den beiden Voraussetzungen gefolgert werden können, daß jede der Kräfte die entgegengesetzt mittlere der übrigen ist. Es ist aber nach § 50.

$$(Y) = A + B + \ldots\ldots + Y \text{ und}$$

$$('y) = \frac{'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY}{A + B + \ldots\ldots + Y}$$

und zufolge der Voraussetzungen

$$Z = -(A + B + \ldots\ldots + Y);$$

$$'z = -\frac{'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY}{Z}$$

$$= \frac{'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY}{A + B + \ldots\ldots + Y}$$

folglich

$$Z = -(Y) \text{ und}$$
$$'z = ('y)$$

d. h. jede der Kräfte (etwa Z) ist eben so groß wie die entgegengesetzt mittlere der übrigen, und fällt mit ihr in eine und dieselbe Richtungslinie, so daß also nach §. 27 ein vollkommenes Gleichgewicht statt findet.

Beweis II. Die Summe $A + B + \ldots\ldots + Z = S$ drückt das Bestreben der Kräfte aus, △ in fortgehender Richtung zu bewegen; da nun aber $S = 0$ ist; so entsteht also keine Bewegung zum Ziel der Kräfte. Ferner giebt die Summe $'aA + \ldots\ldots + 'zZ = S'$ die Größe des Bestrebens an, △ um l zu drehen (§. 45); weil nun aber $S' = 0$ ist; so erfolgt also diese Drehung nicht, auch erleidet l, weil $S = 0$ ist, keine Einwirkung. Aus $S = 0$ und $S' = 0$ folgt aber nach §. 49, daß auch in Beziehung auf jede Achse, die algebr. Summe der statischen Momente $= 0$ ist; folglich um keine einzige Achse ein Bestreben zu drehender Bewegung sich äußert.

§. 52. Zusatz. Reducirt man irgend eine der Kräfte auf einen andern Punct, so findet zwar auch keine Drehung um l, aber blos um dieses l statt; aber die algebr. Summe der Kräfte hört auf $= 0$ zu sein; also erleidet l eine Einwirkung, muß daher dieser widerstehen können, und die Kräfte sind dann nur im unvollkommenen Gleichgewicht.

§. 53. Lehrsatz. Wenn parallel in △ wirkende Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht sind, so ist auch

1stens ihre algebr. Summe = 0;

2tens die algebr. Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf jedes l = 0; oder

Behauptung.

1) $A + B + \ldots\ldots + Z = 0$

2) $'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'zZ = 0$.

Voraussetzung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht unter diesen Kräften statt.

Beweis I. Da Gleichgewicht ist, so bleibt es auch, wenn man für einige oder mehrere dieser Kräfte ihrer mittlere wirken läßt. Nimmt man daher die Kräfte A; B; .... bis Y fort, und läßt dafür (Y) am Hebelsarm ('y) wirken, so bleibt noch vollkommenes Gleichgewicht. Dann hat man aber nur 2 thätige Kräfte (Y) und Z, und es ist also nach §. 32

$$Z = -(Y) \text{ und}$$

$$'z = ('y)$$

oder nach §. 50

$$Z = -(A + B + \ldots\ldots + Y) \text{ und}$$

$$'z = \frac{'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY}{A + B + \ldots\ldots + Y}$$

$$= \frac{'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY}{-Z}$$

also auch

$$A + B + \ldots\ldots + Y + Z = 0; \text{ und}$$

$$'aA + 'bB + \ldots\ldots + 'yY + 'zZ = 0.$$

Beweis II. Weil, der Voraussetzung nach, vollkommnes Gleichgewicht statt findet, so muß das Bestreben zu fortgehender, dem Ziel der Kräfte sich nähernder Bewegung = 0; und das, zu drehender,

um jedes l auch $= 0$ sein; jedes Bestreben drückt aber die Summe $A + B + \ldots + Z = S$; dieses die $'aA + 'bB + \ldots + 'zZ = S'$ aus, und es muß also nicht nur $S = 0$; sondern auch $S' = 0$ sein.

§. 54. Lehrsatz. Wenn Kräfte parallel in Δ wirken, und es ist ihre algebr. Summe $= 0$; die algebr. Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf irgend einer Achse l, aber nicht $= 0$, sondern $= k$; so ist auch in Beziehung auf jede andere Achse l'' die algebr. Summe der statischen Momente $= k$; oder, wenn man den Abstand zwischen l und l'' in Δ, normal auf A'; B' u. s. w. gemessen, mit ϱ bezeichnet, so ist

Behauptung.

$$(\varrho + 'a)\,A + (\varrho + 'b)\,B + \ldots = k$$

Voraussetzungen.

$$1)\quad A + B + \ldots = 0$$

$$2)\quad 'aA + 'bB + \ldots = k$$

Beweis. Man multiplicire $A + B + \ldots = 0$ mit ϱ und addire das Product zu $'aA + 'bB + \ldots = k$; so entsteht $(\varrho + 'a)\,A + (\varrho + 'b)\,B + \ldots = k$ wie zu beweisen war.

§. 55. Lehrsatz. Wenn eine feste Linie az in ihren Endpuncten a; z; von Kräften A und Z nach parallelen Richtungslinien angegriffen wird, und es wirken zwischen a und z parallel mit A' und Z' noch mehrere Kräfte B; C; .... Y auf az, in den Puncten b; c; .... y; so wird, wenn die algebraische

Summe der Kräfte = o; die der statischen Momente derselben aber nicht gleich o ist, eine Drehung der Linie az um ihren Mittelpunct m erfolgen; oder

Behauptung. Es erfolgt Drehung der festen Linie az um ihren Mittelpunct m.

Voraussetzungen.

$$1)\ A + B + \ldots\ldots = 0$$

$$2)\ 'aA + 'bB + \ldots\ldots = k.$$

Beweis. Nach §. 54 ist, bei den gemachten Voraussetzungen, das Bestreben, Drehung hervorzubringen, in Beziehung auf jeden Drehpunct π in Δ, immer = k; hienach ist also für jeden Drehpunct gleiche Wahrscheinlichkeit zur Drehung um ihn vorhanden. Da aber nach §. 29, weil $A + B + \ldots\ldots = 0$ ist, keine Annähernng der angegriffenen Linie az ans Ziel der Kräfte erfolgen kann, so kann nur um einen solchen Drehpunct Drehung sich erzeigen, für welchen az sich dem Ziel nicht nähert, und dieser Punct ist der Mittelpunct von az.

§. 56. Lehrsatz. Wenn Kräfte parallel in einer Ebene wirken, und es ist 1tens die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende Bewegung = o; so erfolgt keine fortgehende Bewegung, wohl aber vielleicht eine drehende um irgend eine Achse, jedoch ohne daß sie eine Einwirkung erleidet. Ist ferner 2tens die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf drehende Bewegung um irgend eine Achse l = o; so erfolgt diese drehende Bewegung nicht, wohl aber vielleicht eine

Einwirkung auf die Achse l, oder auch Drehung um eine andere Achse, wenn man l wegnähme, und an einer andern Stelle anbrächte. Ist aber 3tens in Beziehung auf fortgehende Bewegung nach irgend einer Richtung, und zugleich auch in Beziehung auf drehende Bewegung um irgend eine Achse die algebr. Summe der Momente gleich Null, so findet ein vollkommenes Gleichgewicht statt.

Beweis. 1stens für fortgehende Bewegung. Hier ist die

Behauptung. $A + B + C + \ldots = 0$;

und die

Voraussetzung. $Aa_{,} + B.b_{,} + \ldots = 0$.

Entstände durch irgend eine Veranlassung fortgehende Bewegung, so würde wegen der parallelen Lage sämmtlicher Richtungslinien A'; B' u. s. w. jede Kraft ihrem Ziel um gleichviel näher kommen; es ist also für fortgehende Bewegung

$$a_{,} = b_{,} = c_{,} = \text{u. s. w.}$$

Aus der Voraussetzung folgt daher

$$Aa_{,} + Ba_{,} + C.a_{,} + \ldots = 0;$$

oder, durch $a_{,}$ dividirt

$$A + B + \ldots = 0.$$

2tens für drehende Bewegung um irgend eine Achse l. Hier ist die

Behauptung. $'aA + 'bB + \ldots = 0$;

und die

Voraussetzung. $Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots = 0$;

wo $a_{,}$; $b_{,}$ u. s. w. diejenigen Anfangsgeschwindigkeiten

ausdrücken, welche A′; B′ u. s. w. im ersten Augenblick einer entstehenden Drehung um l, zu ihrem Ziel durchlaufen würden. Bezeichnet φ den Drehungswinkel um l (*Fig.* 5.), wenn Drehung entstände, so hat man nach §. 19

$$a_{\prime} = {}^{\prime}a \text{ Sin. } \varphi$$

eben so $b_{\prime} = {}^{\prime}b \text{ Sin. } \varphi$ u. s. w.

Setzt man diese Werthe für $a_{\prime}$; $b_{\prime}$ u. s. w. in die Voraussetzung, so entsteht

$$\text{Sin. } \varphi \, ({}^{\prime}aA + {}^{\prime}bB + \ldots\ldots) = 0$$

oder, wenn man durch Sin. φ dividirt,

$${}^{\prime}aA + {}^{\prime}bB + \ldots\ldots = 0$$

3tens für vollkommenes Gleichgewicht.

Wenn also in Beziehung auf fortgehende Bewegung

$$Aa_{\prime} + Bb_{\prime} + \ldots\ldots = 0 \text{ ist,}$$

und zugleich auch in Beziehung auf drehende Bewegung um irgend eine Achse

$$Aa_{\prime} + Bb_{\prime} + \ldots\ldots = 0 \text{ ist;}$$

so sind die Kräfte A; B u. s. w. untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, denn aus der ersten Gleichung folgte

$$A + B + \ldots\ldots = 0$$

und aus der zweiten

$$A\,{}^{\prime}a + B\,{}^{\prime}b + \ldots\ldots = 0$$

und aus beiden ergiebt sich, nach § 51, daß vollkommnes Gleichgewicht statt findet.

§. 57. **Lehrsatz.** Wenn Kräfte, welche parallel in einer Ebene wirken, untereinander ein vollkommenes Gleichgewicht erhalten, so ist die algebraische Summe

ihrer mechanischen Momente, sowohl in Hinsicht auf fortgehende Bewegung als auf drehende um jede Achse, gleich Null, oder

Behauptung. $Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots = 0.$

Voraussetzung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Beweis. Weil Gleichgewicht statt findet, so ist

1) $A + B + \ldots = 0$; und

2) $'aA + 'bB + \ldots = 0$

in Beziehung auf jede Achse. Nun ist aber im ersten Fall, d. h. in Beziehung auf fortgehende Bewegung

$$a_{,} = b_{,} = c_{,} \text{ u. s. w.}$$

also folgt aus $A + B + \ldots = 0$

daß auch $Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots = 0$ ist.

Im zweiten Fall, nemlich in Beziehung auf drehende Bewegung, hat man, wie im vorigen §.

$$a_{,} = {}'a \text{ Sin. } \varphi$$

$$b_{,} = {}'b \text{ Sin. } \varphi \text{ u. s. w.}$$

also $'a = a_{,} \text{ Cosec. } \varphi$

$$'b = b_{,} \text{ Cosec. } \varphi \text{ u. s. w.}$$

Setzt man diese Werthe in $'aA + 'bB + \ldots = 0$; so ergiebt sich

$$\text{Cosec. } \varphi\,(Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots) = 0; \text{ oder}$$

$$Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots = 0.$$

Anmerk. Dieser Satz ist auch folgendergestalt auszudrücken: Erfolgt keine fortgehende Bewegung, so ist die algebraische Summe der mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende Bewegung = o; und

Erfolgt keine drehende Bewegung um eine Achse l; so ist die algebraische Summe der mechanischen Momente in Beziehung auf diese Drehung = o.

§. 58. Zusatz. Wenn also Kräfte parallel in einer Ebene wirken, und es ist die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf irgend eine der Bewegungen, welche entstehen könnte, = 0; so erfolgt diese Bewegung nicht; und umgekehrt: wenn irgend eine Bewegung, welche statt finden könnte, nicht erfolgt, so ist die algebr. Summe der mechanischen Momente in Beziehung auf dieselbe = 0.

Dieses Gesetz heißt: das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, d. i. des Bestrebens nach Geschwindigkeiten oder der von jeder Kraft zwar angeregten, aber nicht zur Wirklichkeit kommenden Bewegungen. Es ist, wie die Folge zeigen wird, in der größten Allgemeinheit gültig.

Anwendungen der Lehren des ersten Abschnitts.

Aufgabe I. Es wirken $A = 10$; $B = -6$; $C = 4$; $D = -10$ parallel in $\triangle$; und π in A', in a angenommen, sei $'b = 3$; $'c = 5$, $'d = 9$; man soll (D) und ('d) bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$(D) = 10 - 6 + 4 - 10 = -2$$

$$('d) = \frac{-6.3 + 4.5 - 10.9}{-2} = 44$$

Aufgabe II. Es wirken $A = 6$; $B = -9$; $C = 5$ parallel; ihre Entfernungen sind durch $'b - 'a = 4$; und $'c - 'b = 2$ gegeben. Man soll 1stens durch Anbringung einer festen Drehachse an einer zu

bestimmenden Stelle ein unvollkommenes Gleichgewicht herstellen; 2tens soll man durch Veränderung der Größen C und $'c$ ein vollkommenes Gleichgewicht erzeugen.

Auflösung. 1stens. Die Kräfte sind nicht im vollkommenen Gleichgewicht, weil $6 + (-9) + 5 = 2$ und nicht $= 0$ ist. Denkt man sich nun aus dem Punct π, in welchen die Drehachse l; $\triangle$ normal schneidet, eine Normale auf A' gefällt, so ist diese oder $'a$ die zu bestimmende Größe, und die Bedingungsgleichung ist

$$6.\, 'a - 9.\, ('b - 'a + 'a) + 5.\, ('c - 'a + 'a) = 0$$

oder

$$6.\, 'a - 9\, (4 + 'a) + 5.\, (6 + 'a) = 0$$

woraus sich

$$'a = 3 \text{ ergiebt.}$$

2tens. Soll durch Abänderung der Größen C und $'c$ ein vollkommenes Gleichgewicht hergestellt werden, so hat man die Bedingungsgleichungen

1) $6 - 9 + C = 0;$

2) π in A' gedacht, $-9.4 + C\, 'c = 0.$

Aus 1) folgt $C = 3$; und dann

aus 2) $'c = 12.$

Aufgabe III. Die Kräfte $A = 6$; $B = -9$; $C = 3$; für welche $'b - 'a = 4$; $'c - 'a = 12$ ist, erhalten untereinander ein vollkommenes Gleichgewicht. Man soll C in Beziehung auf eine angegebene feste Drehachse l auf einen Hebelsarm $= 6$ reduciren.

Auflösung. 1stens. Nimmt man l so, daß die Normale von π auf $A' = 5$ wird, so hat man die,

in Beziehung auf diese Achse mit C = 3 gleichgültige Kraft in der Entfernung 6;

$$= \frac{3 \cdot 17}{6} = 8\frac{1}{2}$$

das vollkommene Gleichgewicht hört aber dann auf, und es findet nur ein unvollkommenes in Beziehung auf die feste Drehachse l unter den Kräften A; B; C = 8 ½ statt, welche jetzt einen Druck

$$= 6 - 9 + 8\tfrac{1}{2} = 5\tfrac{1}{2}$$

erleidet. Bringt man aber an die Stelle der festen Achse, also in π eine Kraft = — 5 ½ an; so ist unter den Kräften 6; — 9; 8 ½; — 5 ½ ein vollkommenes Gleichgewicht.

2tens. Nimmt man l so, daß die Normale von π auf A′ = — 2 wird, so hat man die, in Beziehung auf diese Achse mit C = 3 gleichgültige Kraft in der Entfernung 6;

$$= \frac{3 \cdot 10}{6} = 5.$$

Der Druck auf l ist nun

$$= 6 - 9 + 5 = 2.$$

Sie, die Achse, muß also mit einer Gewalt = — 2 widerstehen können, dann ist unvollkommenes Gleichgewicht unter den Kräften A = 6; B = — 9; C = 5 an den Hebelsarmen ′a = — 2; ′b = 2; ′c = 6; in Beziehung auf die feste Achse l, oder auch: vollkommenes Gleichgewicht unter den Kräften A = 6; B = — 9; C = 5; D = — 2; an den Hebelsarmen ′a = — 2; ′b = 2; ′c = 6; ′d = 0.

Auf-

Aufgabe IV. Es wirken n Kräfte, welche eine arithmetische Reihe bilden, deren erstes Glied = A; deren Differenz aber = D ist, parallel in gleichen Abständen = a; man soll die Größe M der mittleren Kraft, und die 'm ihres Hebelarmes in Beziehung auf die Richtungslinie der ersten Kraft A bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$M = A + A + D + A + 2D + \dots + A + (n-1)D$$

oder

$$M = [2A + (n-1)D]\frac{n}{2};$$

ferner

$$'m = \frac{A.0 + (A+D)a + (A+2D)2a + \dots + (A+(n-1)D)(n-1)a}{[2A+(n-1)D]\frac{n}{2}}$$

$$= a.\frac{A + 2A + \dots + (n-1)A + D + 4D + 9D + \dots + (n-1)^2 D}{[2A+(n-1)D]\frac{n}{2}}$$

$$= a\frac{[1+2+3+\dots+n-1]A + [1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2]D}{[2A+(n-1)D]\frac{n}{2}}$$

$$= a\frac{\frac{n.(n-1)}{2}.A + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}D}{nA + \frac{n(n-1)}{2}D}$$

$$= a\frac{3(n-1)A + (n-1)(2n-1)D}{6A + 3(n-1)D}; \text{ oder auch}$$

$$= \frac{(n-1)a}{3}.\frac{3A + (2n-1)D}{2A + (n-1)D}$$

Ist z. B. A = 1; D = 2; n = 10; a = 1; so ergiebt sich M = 100; 'm = 6,15.

Aufgabe V. Es wirken n Kräfte, welche eine geometrische Reihe bilden, deren erstes Glied = A, und deren beständiger Factor = e ist, parallel in gleichen Abständen = a; man soll M und 'm (wie in der vorigen Aufgabe verstanden) bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$M = A + Ae + Ae^2 + \ldots + Ae^{n-1}$$

also

$$M = \frac{Ae^n - A}{e - 1} \text{ oder} = A.\frac{e^n - 1}{e - 1}$$

und

$$'m = \frac{A.0 + Aea + Ae.^2 2a + Ae.^3 3a + \ldots + Ae^{n-1}.(n-1)a}{A.\frac{e^n - 1}{e - 1}}$$

$$= \frac{e-1}{e^n - 1} ae [1 + 2e + 3e^2 + \ldots + (n-1)e^{n-2}];$$

in $y = 1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1}$ ist aber y von e abhängig, also

$$\frac{dy}{de} = 1 + 2e + 3e^2 + \ldots + (n-1)e^{n-2}$$

Weil nun aber

$$y = 1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1}$$

$$= \frac{e^n - 1}{e - 1} \text{ ist;}$$

so hat man auch

$$\frac{dy}{de} = \frac{(e-1).ne^{n-1} - (e^n - 1)}{(e-1)^2};$$

folglich

$$1 + 2e + \ldots + (n-1)e^{n-2} = \frac{(e-1)ne^{n-1} - e^n + 1}{(e-1)^2}$$

daher

$$'m = \frac{e-1}{e^n - 1} ae \frac{(e-1)ne^{n-1} - e^n + 1}{(e-1)^2}$$

$$= ae \frac{e^{n-1}(ne - n - e) + 1}{(e-1)(e^n - 1)}$$

Ist $a = 1$; $A = 1$; $e = 2$; $n = 10$; so ergiebt sich

$$M = 1023; \; 'm = 8\frac{10}{1023}.$$

Anmerk. Die Summe

$$z = 1 + 2e + 3e^2 + \ldots (n-2)e^{n-3} + (n-1)e^{n-2}$$

läßt sich auch folgendergestalt bestimmen. Man multiplicire

mit e, und subtrahire, so entsteht

$$(1-e)z = 1 + e + e^2 + \ldots, e^{n-2} - (n-1)e^{n-1}$$

$$= \frac{e^{n-1}-1}{e-1} - (n-1)e^{n-1}$$

und hieraus ergiebt sich

$$Z = \frac{(e-1)ne^{n-1} - e^n + 1}{(e-1)^2}.$$

Zweiter Abschnitt.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte, welche in ein festes System von Puncten nach parallelen Richtungslinien wirken, welche in verschiedenen Ebenen liegen.

Bezeichnungen in diesem Abschnitt.

$\triangle$ bezeichne eine Ebene, welche die Richtungslinien der Kräfte unter irgend einem Winkel schneidet.

l'; $,l$ zwei gerade Linien in $\triangle$, welche sich in irgend einem Punct

π (*Fig.* 6.) schneiden, und den Winkel

φ bilden.

A; B u. s. w. Y; Z die Kräfte.

A'; B' . . . . Y'; Z' ihre Richtungslinien.

a; b; . . . . y; z die Durchschnittspuncte von A'; B'; . . . . Y'; Z' mit $\triangle$.

a'; b'; . . . . y'; z'; die Normalen von a; b; . . . . y; z auf $,l$.

$,a$; $,b$; . . . . $,y$; $,z$; die Normalen von a; b; . . . . y; z auf l'.

$'a$; $'b$; . . . . $'y$; $'z$; die Hebelsarme von A; B; . . . . Y; Z in Beziehung auf eine der beiden Linien l' oder $,l$.

$a_{,}$; $b_{,}$; . . . . $y_{,}$; $z_{,}$ die Anfangsgeschwindigkeiten der Richtungslinien A'; B'; . . . . Y'; Z' im Fall das System eine augenblickliche Ortsänderung erlitte.

(B); (C); . . . . (X); (Y) die mittleren Kräfte zu A; B; zu (B); C; und endlich zu (W); X; und zu (X); Y.

(b); (c) u. s. w. (b'); (c') u. s. w. ($_{,}$b); ($_{,}$c) u. s. w. drücke in Beziehung auf (B); (C); u. s. w. dasselbe aus, was b; c u. s. w. b'; c' u. s. w. $_{,}$b; $_{,}$c u. s. w. in Beziehung auf B; C u. s. w. bedeuten.

---

§. 59. Lehrsatz. Wenn

1) $A + B + C + \ldots\ldots + Y + Z = 0$

2) $Aa' + Bb' + \ldots\ldots + Z.\, z' = 0$

3) $_{,}aA + {}_{,}bB + \ldots\ldots + {}_{,}zZ = 0$

ist, so gelten für jede Ebene $\triangle'$; jeden Punct π' in ihr und jede zwei Linien durch π' in $\triangle'$ zwei eben so gebildete Gleichungen wie die 2) und 3).

Beweis I. Für eine Linie $_{,,}l$ in $\triangle$ (*Fig.* 6.) welche mit $_{,}l$ in π irgend einen Winkel μ bildet.

Versteht man unter a''; b'' u. s. w. die Normalen von a; b u. s. w. auf $_{,,}l$; so ergiebt sich leicht

$$a'' = a' \text{Cos.}\, \mu + \frac{_{,}a + a' \text{Cos.}\, \varphi}{\text{Sin.}\, \varphi} . \text{Sin.}\, \mu \text{ oder}$$

$$a'' \text{Sin.}\, \varphi = a' \text{Sin.}\, (\varphi + \mu) + {}_{,}a \text{Sin.}\, \mu; \text{ eben so}$$

$$b'' \text{Sin.}\, \varphi = b' \text{Sin.}\, (\varphi + \mu) + {}_{,}b \text{Sin.}\, \mu;$$

$$c'' \text{Sin.}\, \varphi = c' \text{Sin.}\, (\varphi + \mu) + {}_{,}c \text{Sin.}\, \mu \text{ u. s. w.}$$

Multiplicirt man nun 2) mit Sin. $(\varphi + \mu)$ so entsteht

$$A a' \text{Sin.} (\varphi + \mu) + B b' \text{Sin.} (\varphi + \mu) + \ldots = 0;$$

ferner 3) mit Sin. μ, so hat man

$$A\,{}_{,}a \text{ Sin. } \mu + B\,{}_{,}b \text{ Sin. } \mu + \ldots = 0;$$

und addirt man beide Producte, so findet sich

$$A [a' \text{Sin} (\varphi + \mu) + {}_{,}a \text{ Sin } \mu] + B [b' \text{Sin} (\varphi + \mu) + {}_{,}b \text{ Sin } \mu] + \ldots = 0$$

oder, wenn man obige Werthe substituirt.

$$A a'' \text{Sin.} \varphi + B b'' \text{Sin.} \varphi + C c'' \text{Sin.} \varphi + \ldots = 0$$

und dividirt man diese Gleichung mit Sin. φ, so folgt

$$A a'' + B b'' + C c'' + \ldots = 0,$$

wie zu beweisen war.

II. Behält man $_{,}l$ bei, und zieht in $\triangle$ durch π eine Linie l'' welche mit l' irgend einen Winkel μ bildet, so bleibt der Beweis ganz wie in I, und es gelten daher 2 so gebildete Gleichungen wie die 2te und 3te vorausgesetzte, für jede 2 Linien in $\triangle$, welche sich in π schneiden, mag der Winkel, welchen sie einschließen, so groß oder klein sein wie er will.

III. Für jede 2 Linien in $\triangle$, welche sich in irgend einem andern Punct π' unter irgend einem Winkel schneiden.

Zieht man zuförderst durch π' zwei Parallelen, eine mit l' die andere mit $_{,}l$; so folgt ganz nach §. 49, daß für diese Linien eben solche zwei Gleichungen gelten wie die 2te und 3te vorausgesetzte für $_{,}l$ und l'. Gelten aber für 2 Schenkel durch π' diese Gleichungen, so finden sie nach I und II auch für jede 2 Schenkel in $\triangle$ statt, welche in π' irgend einen Winkel bilden.

IV. Nach dem bisherigen folgt also: wenn für $_{,}l$ und l' welche in Δ liegend, in π den Winkel φ bilden, die 3 Gleichungen:

$$1)\quad A + B + \ldots = 0$$
$$2)\quad Aa' + Bb' + \ldots = 0$$
$$3)\quad {}_{,}aA + {}_{,}bB + \ldots = 0$$

gegeben sind, so gelten die beiden letzten Gleichungen für jedes π' in Δ und jede 2 Linien durch π' in Δ. Kann man nun noch zeigen, daß auch für irgend eine andere Ebene Δ' welche mit Δ einen unbestimmten Winkel λ bildet, einen Punct in ihr, und ein paar Linien durch diesen Punct, eben so gebildete 2 Gleichungen aus den vorausgesetzten sich folgern lassen, so ist die Allgemeingültigkeit derselben vollständig erwiesen.

V. Es sei aW die Projection von A' auf die Ebene Δ des Papieres *(Fig. 7.)*; α' ihr Neigungswinkel gegen $_{,}l$; α der Neigungswinkel von A' gegen Δ; so daß, wenn man $WaV = \alpha$ macht und die Ebene dieses Winkels um aW sich so lange gedreht denkt, bis sie normal auf Δ steht, Va die Richtungslinie A' in ihrer merkwürdigen Lage darstellt. Nimmt man nun eine Ebene Δ' an, welche Δ in $_{,}l$ schneidet und mit Δ den Neigungswinkel λ bildet, und bezeichnet den Schneidungspunct von Δ' und A' mit R, fällt RN normal auf aW; NT normal auf $_{,}l$; errichtet NQ normal auf NT und macht NQ = NR, so wird, wenn man das Dreieck NTQ so lange um NT sich gedreht denkt, bis seine Ebene normal auf Δ

steht, Q in R fallen, und TQW oder was dasselbe sagt, TRW (in der erwähnten Lage gedacht) wird in $\triangle'$ liegen, oder $\triangle'$ darstellen, also $NTQ = \lambda$; folglich $QT = a''$ in $\triangle'$ die Normale aus dem Durchschnittspunct von A' mit $\triangle'$ auf $,l$ sein. Es ist nun aber

$$NR = NQ = a'' \text{ Sin. } \lambda;$$

$$aN = NR \text{ Cotg. } \alpha = a'' \text{ Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha$$

$$aW = a' \text{ Cosec. } \alpha'; \text{ also}$$

$$NW = aW - aN = a' \text{ Cosec. } \alpha' - a'' \text{ Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha$$

daher

$$NT = NW \text{ Sin. } \alpha' = a' - a'' \text{ Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha \text{ Sin. } \alpha'$$

Es ist aber auch

$$NT = a'' \text{ Cos. } \lambda, \text{ folglich hat man}$$

$$a' = a'' [\text{Cos. } \lambda + \text{Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha \text{ Sin. } \alpha']$$

oder, wenn man $\text{Cos. } \lambda + \text{Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha \text{ Sin. } \alpha'$ mit ϱ bezeichnet,

$$a' = \varrho \cdot a''$$

Da nun alle Linien A'; B' u. s. w. parallel laufen, also für jede, α; α' unveränderlich dieselben Gegenstände bleiben, so hat man also auch, wenn b'' die Normale vom Schneidungspunct der Ebene $\triangle'$ mit B' auf $,l$ ausdrückt,

$$b_{,} = b''; \text{ eben so}$$

$$c_{,} = c'' \text{ u. s. w.}$$

Zieht man nun in $\triangle$ durch π eine Linie l'' (*Fig.* 8.) welche mit $,l$ einen beliebigen Winkel φ' bildet, und setzt die Normale von den Durchschnittspuncten der Linien A'; B' u. s. w. mit $\triangle'$, auf l'' gleich

$_{\prime\prime}a$; $_{\prime\prime}b$ u. s. w. so hat man zur Bestimmung von $_{\prime\prime}a$ nach I

$$_\pi H = \frac{{}_\prime a + a' \text{Cos.}\, \varphi}{\text{Sin.}\, \varphi};$$

ferner $HT = aN \text{ Cos. } \alpha'$ *(Fig. 7 u. 8.)*

$$= a'' \text{ Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha \text{ Cos. } \alpha'; \text{ also}$$

$$_\pi T = {}_\prime a \text{ Cosec. } \varphi + a' \text{ Cotg. } \varphi + a'' \text{ Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha \text{ Cos. } \alpha'$$

Es ist aber

$$_\pi T.\ \text{Sin. } \varphi' = {}_{\prime\prime}a + a'' \text{ Cos. } \varphi';$$

folglich wenn man den Werth für $_\pi T$ und den obigen für a' substituirt, und $_\prime a$ entwickelt

$$_\prime a = {}_{\prime\prime}a \text{ Sin. } \varphi \text{ Cosec. } \varphi' + a'' [\text{Sin. } \varphi \text{ Cotg. } \varphi' - \text{Cos. } \varphi \text{ Cos. } \lambda - \text{Sin. } \lambda \text{ Cotg. } \alpha \text{ Sin. } (\alpha' + \varphi)]$$

Bezeichnet man nun den Coefficienten von $_{\prime\prime}a$ mit n; den von a'' mit m; so hat man also

$$_\prime a = {}_{\prime\prime}a n + m a'';$$

und, weil α; α'; φ; φ'; λ für jede der Linien A'; B' u. s. w. dieselben Werthe behalten; eben so

$$^\prime b = {}_{\prime\prime}b.\ n + m b''$$

$$_\prime c = {}_{\prime\prime}c\ n + m c'' \text{ u. s. w.}$$

Wenn man nun in die beiden Voraussetzungen 2) und 3) für a'; b' u. s. w. $_\prime a$; $_\prime b$ u. s. w. die dargestellten Ausdrücke setzt, so erhält man

$$A \varrho a'' + B \varrho b'' + C \varrho c'' + \ldots\ldots = o;$$

und

$$_{\prime\prime}a A n + a'' m A + {}_{\prime\prime}b n B + b'' m B + \ldots\ldots = o$$

oder

$$\varrho\, [A a'' + B b'' + C c'' + \ldots\ldots] = o;$$

und

$$n\, [{}_{\prime\prime}a A + {}_{\prime\prime}b B + \ldots] + m\, [A a'' + B b'' + \ldots] = o;$$

oder auch

$$Aa'' + Bb'' + \ldots = o;\ \text{und}$$

$$_{\prime\prime}aA + {}_{\prime\prime}bB + \ldots = o,$$

wodurch die Allgemeingültigkeit der 2ten und 3ten Gleichung dargethan ist.

Anmerk. Der Beweis wird etwas leichter, wenn man gleich von Anfang an $\varphi = 90°$ annimmt, so daß ,a und a' als rechtwinklichte Coordinaten zu Bestimmung der Puncte a; b; c u. s w. erscheinen.

§. 60. Lehrsatz. Die mittlere Kraft mehrerer parallel in verschiedenen Ebenen wirkender Kräfte A; B; ..... Y ist $= A + B + \ldots + X + Y$ und der Durchschnittspunct ihrer Richtungslinie mit Δ, d. h. ihre Stelle bestimmt sich durch

$$\frac{a'A + b'B + \ldots + y'Y}{A + B + \ldots + Y}$$

als normalen Abstand desselben von ,l; und durch

$$\frac{{}_{,}aA + {}_{,}bB + \ldots + {}_{,}yY}{A + B + \ldots + Y}$$

als normalen Abstand von l'.

Beweis. Die mittlere Kraft zu A und B, also (B), ist nach § 41

$$= A + B;$$

und ihre Richtungslinie (B') läuft mit A' und B' parallel in derselben Ebene, so daß also alle 3 Linien einerlei Winkel mit ab bilden; setzt man diesen $= \varrho$; *(Fig. 6.)* so ist nach §. 45

$$(B).\ a(b)\ \text{Sin.}\ \varrho = B.\ ab.\ \text{Sin.}\ \varrho;$$

oder weil $(B) = A + B$ ist,

$$A + B : B = ab : a(b)\ \text{also}$$

$$A + B : B = \left\{ \begin{matrix} b' - a' : (b') - a' \\ ,b - ,a : (,b) - ,a \end{matrix} \right\}$$ folglich ist

$$(b') = \frac{a'A + b'B}{A + B};$$

$$(,b) = \frac{,aA + ,bB}{A + B}.$$

Verbindet man nun (b) mit c durch eine gerade Linie und schließt wie eben, so ergiebt sich

$$(C) = (B) + C;$$

$$(c') = \frac{(B)(b') + Cc'}{(B) + C};$$

$$(,c) = \frac{(B)(,b) + C.,c}{(B) + C};$$

oder wenn man die vorigen Werthe substituirt

$$(C) = A + B + C;$$

$$(c') = \frac{Aa' + Bb' + Cc'}{A + B + C};$$

$$(,c) = \frac{,aA + ,bB + ,cC}{A + B + C};$$

schließt man so fort, so hat man endlich

$$(Y) = A + B + \ldots + Y;$$

$$(y') = \frac{Aa' + Bb' + \ldots + Yy'}{A + B + \ldots + Y};$$

$$(,y) = \frac{,aA + ,bB + \ldots + ,yY}{A + B + \ldots + Y}.$$

§. 61. Zusatz. Da (Y) und ihr durch (y') und (,y) bestimmter Schneidungspunct mit △ ganz unabhängig von ε so wie von dem Neigungswinkel der Richtungslinien der Kräfte gegen △ sich bestimmt hat, so bleibt also auch dieser Punct unverändert derselbe, die Linien A'; B' u. s. w. mögen, unter wel-

chen Winkel man will, gegen Δ sich neigen, wenn sie nur untereinander parallel bleiben.

§. 62. Lehrsatz. Wenn Kräfte parallel in verschiedenen Ebenen wirken, und es ist

1stens ihre algebr. Summe = 0.

2tens die algebr. Summe der Producte

$Aa' + Bb' + \ldots = 0$

und zugleich auch die

3tens $,aA + ,bB + \ldots$ gleich Null; so sind die Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht; oder

Behauptung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Voraussetzungen.

1) $A + B + \ldots + Y + Z = 0.$

2) $Aa' + Bb' + \ldots + Zz' = 0.$

3) $,aA + ,bB + \ldots + ,zZ = 0.$

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß, zufolge den 3 Voraussetzungen, jede der Kräfte (etwa Z) die entgegengesetzt mittlere der übrigen ist; man muß also zeigen, daß

1) $Z = -(Y)$

2) $z' = (y')$

3) $,z = (,y)$ ist.

Nun ist aber nach dem vorigen §.

$$(Y) = A + B + \ldots + Y$$

$$(y') = \frac{Aa' + Bb' + \ldots + Yy'}{(Y)};$$

$$(,y) = \frac{,aA + ,bB + \ldots + ,yY}{(Y)};$$

und aus den 3 Voraussetzungen ergiebt sich

$$Z = -(A + B + \ldots + Y);$$

$$z' = -\frac{Aa' + Bb' + \ldots + Yy'}{Z};$$

$$,z = -\frac{,aA + ,bB + \ldots + ,yY}{Z};$$

Die Vergleichung ergiebt nun sogleich

$$Z = -(Y)$$
$$z' = (y')$$
$$,z = (,y)$$

wie zu beweisen war.

§. 63. Lehrsatz. Wenn Kräfte, parallel in verschiedenen Ebenen wirkend, vollkommenes Gleichgewicht untereinander erhalten, so finden auch in Beziehung auf jedes △; ⚹; l′ und ,l die 3 Gleichungen des vorigen §. statt, oder

Behauptung.

1) $A + B + \ldots + Z = 0$

2) $Aa' + Bb' + \ldots + Zz' = 0$

3) $,aA + ,bB + \ldots + ,zZ = 0.$

Voraussetzung. Es ist vollkommenes Gleichgewicht.

Beweis. Da Gleichgewicht ist, so ist nothwendig jede Kraft die entgegengesetzt mittlere der übrigen; man hat also

$$Z = -(Y)$$
$$z' = (y')$$
$$,z = (,y)$$

oder nach §. 60

$$Z = -(A + B + \ldots + Y)$$

$$z' = \frac{Aa' + Bb' + \ldots + Yy'}{-Z}$$

$$,z = \frac{,aA + ,bB + \ldots + ,yY}{-Z}$$

und hieraus folgt

1) $A + B + \ldots + Y + Z = 0$

2) $Aa' + Bb' + \ldots + Z.z' = 0$

3) $,aA + ,bB + \ldots + ,zZ = 0$

wie bewiesen werden sollte.

§. 64. Lehrsatz. Wenn Kräfte parallel in verschiedenen Ebenen wirken, und es ist in Beziehung auf irgend eine Achse ,l

$$Aa' + Bb' + \ldots = 0;$$

so ist auch in Beziehung auf dieselbe Achse die algebr. Summe der statischen Momente dieser Kräfte = 0; oder

Behauptung. $'aA + 'bB + \ldots = 0$

Voraussetzung. $Aa' + Bb' + \ldots = 0.$

Beweis. Ist AW (*Fig.* 9.) die Projection von A′ auf △; α′ ihr Neigungswinkel gegen ,l; α der Neigungswinkel von A′ gegen △; und man macht WaV = α, und denkt sich die Ebene des Winkels WaV so lange um aW gedreht, bis sie normal auf △ steht; so ist Va = A′; macht man nun aWV = 90°, HF in ,l = WV, zieht aF, fällt HG normal auf aF, zieht GQJ parallel ,l bis zum Durchschnitts J mit aW, fällt aus J die Normale JK auf ,l, errichtet in J auf aW die Normale JL, bis zum Durchschnittspunct L mit aV, macht in der Verlängerung von GJ, JL′ = JL, und denkt sich nun die

Dreiecksebenen aHF und JKL′ so lange um aH und JK gedreht, bis beide normal auf △ stehen; so fallen L und L′ in einander, and KL′ ist in seiner wirklichen Lage der Hebelsarm ′a von A in Beziehung auf ,l; indem KL′ = ′a, wie sich leicht beweisen läßt, der Construction zufolge, sowohl auf ,l als auf A′ normal steht. Die Größe von ′a, da HG = KL′ = ′a ist, ergiebt sich nun leicht folgendergestalt: Setzt man nemlich den Winkel FaH = x; so ist ′a = a′. Sin. x und

$$VW = FH = a' \text{ tang. } x = aW \text{ tang. } \alpha$$
$$= a' \text{ Cosec. } \alpha' \text{ tang. } \alpha; \text{ daher}$$
$$\text{tang. } x = \text{Cosec. } \alpha' \text{ tang. } \alpha; \text{ folglich}$$

$$\text{Sin. } x = \frac{\text{Sin } \alpha}{\sqrt{\text{Sin. } \alpha^2 + \text{Cos. } \alpha^2 \text{ Sin. } \alpha'^2}}; \text{ oder}$$

$$\text{Sin. } x = \frac{\text{Sin. } \alpha}{\sqrt{1 - \text{Cos. } \alpha^2 \text{ Cos. } \alpha'^2}}; \text{ also}$$

$$'a = \frac{a' \text{ Sin. } \alpha}{\sqrt{1 - \text{Cos. } \alpha^2 . \text{ Cos. } \alpha'^2}}$$

oder, wenn man $\frac{\text{Sin. } \alpha}{\sqrt{1 - \text{Cos. } \alpha^2 \text{ Cos. } \alpha'^2}}$ mit n bezeichnet

$$'a = na'.$$

Eben so ergiebt sich, weil wegen der parallelen Lage sämmtlicher Linien A′; B′ u. s. w. α und α′ immer dieselben Größen für jede dieser Linien bleiben

$$'b = nb'$$
$$'c = nc' \text{ u. s. w.}$$

Aus der Voraussetzung folgt aber sogleich

$$Ana' + Bnb' + \ldots\ldots = 0$$

und hieraus

$$'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0$$

wie gezeigt werden sollte. Eben so wird auch der umgekehrte Satz bewiesen.

§. 65. Zusatz. Die Lehrsätze §. 59, 62 und 63 behalten also auch ihre Richtigkeit, wenn man in ihnen für die Producte Aa'; Bb' u. s. w. $,aA$; $,bB$ u. s. w. die statischen Momente der Kräfte in Beziehung auf die Achsen $,l$ und l' nimmt. Wenn also Kräfte parallel in verschiedenen Ebenen wirken, und es ist ihre algebr. Summe $= 0$, und die algebr. Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf zwei, nicht parallele Achsen, jede ebenfalls $= 0$; so ist nach §. 59 und 64 die algebr. Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf jede Achse $= 0$, und es sind die Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, und umgekehrt.

Wenn aber blos die algebraische Summe der statischen Momente solcher Kräfte in Beziehung auf eine Achse, etwa $l' = 0$ ist, so erfolgt blos keine Drehung um sie; ist sie nun fest und unverrückbar an ihre Stelle gebunden, so findet Gleichgewicht, in Beziehung auf die einzig mögliche Bewegung des Systems, nemlich Drehung um l', also nur unvollkommenes Gleichgewicht unter jenen Kräften statt. Eben so umgekehrt.

§. 66. Lehrsatz. Wenn Kräfte parallel in verschiedenen Ebenen wirken, und es ist 1stens die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende Bewegung = o; so erfolgt keine fortgehende Bewegung. Ist aber 2tens die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf drehende Bewegung um irgend eine Achse, etwa ,l = o; so erfolgt diese drehende Bewegung nicht. Ist aber 3tens die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende und zugleich auch in Beziehung auf drehende Bewegung um zwei verschiedene nicht parallele Achsen gleich Null, so findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Beweis I. In Hinsicht auf fortgehende Bewegung. Hier ist

Behauptung. $A + B + C + \ldots\ldots = o.$

Voraussetz. $Aa_{,} + Bb_{,} + Cc_{,} + \ldots\ldots = o.$

Würde durch irgend eine fremde Veranlassung das System fortgehend verrückt, so müßte, weil A'; B' u. s. w. parallel sind, jeder Punct dieser Linien dem Ziel um gleichviel näher kommen. Es ist daher in Beziehung auf fortgehende Bewegung

$$a_{,} = b_{,} = c_{,} = \text{u. s. w.}$$

Aus der Voraussetzung folgt daher

$$Aa_{,} + Ba_{,} + Ca_{,} + \ldots\ldots = o;$$

oder, durch $a_{,}$ dividirt

$$A + B + C + \ldots\ldots = o.$$

Beweis II. In Hinsicht auf drehende Bewegung um eine Achse ,l. Hier ist

Behauptung. $'aA + 'bB + \ldots = 0$.

Voraussetz. $Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots = 0$, wo $a_{,}$; $b_{,}$ u. s. w. sich auf drehende Bewegung um $_{,}l$ beziehen.

Angenommen, das System erleide eine drehende Bewegung um $_{,}l$, die Kräfte selbst aber blieben in ihrer parallelen Lage, ohne ihr Ziel z zu ändern, so würde der Endpunct jedes Hebelarms, also auch L als Endpunct von $KL = 'A$ (*Fig.* 9 u. 10), einen Kreisbogen beschreiben, der irgend einem Winkel φ zugehört. Es sei LM dieser von L beschriebene Kreisbogen, so wird Lz — Mz die Annäherung jedes Puncts in A' an z sein, man hat also $a_{,} = Lz - Mz$.

Errichtet man nun in L auf LK (*Fig.* 10) eine Normale, und verlängert sie bis zum Durchschnittspunct N mit der verlängerten KM; setzt den Winkel, welchen A' mit der Tangente LN bildet (er ist der Wechselswinkel mit dem, welchen Va und aF in Fig. 9 in ihrer wirklichen Lage darstellen) $= \alpha_{,}$; macht NLa $= \alpha_{,}$; errichtet in N auf NL eine Normale, bis sie La in F trifft; stellt NP in N auf NK normal, macht NP = NF; zieht PM, und denkt sich dann die beiden rechtwinklichten Dreiecke NLF und NMP um NL und NM so lange gedreht, bis sie beide normal auf der Ebene NLK stehen, so fallen P und F in einander, und setzt man nun den Winkel, welchen in dieser angegebenen Lage die Sehne ML und A' oder Va bilden $= '\alpha$; so hat man $a_{,} = ML \text{ Cos. } '\alpha$; ferner

$$MP^2 = MF^2 = FL^2 + ML^2 - 2\ FL.\ ML\ \text{Cos.}\ {}'\alpha$$

und auch

$$MP^2 = MF^2 = MN^2 + NF^2;\ \text{also}$$

$$MN^2 + NF^2 = FL^2 + ML^2 - 2\ FL.\ ML.\ \text{Cos.}\ {}'\alpha$$

oder

$$MN^2 = NL^2 + ML^2 - 2\ FL.\ ML.\ \text{Cos.}\ {}'\alpha.$$

Es ist aber

$$MN = {}'a\ (\text{Sec.}\ \varphi - 1);$$
$$NL = {}'a\ \text{tang.}\ \varphi;$$
$$ML = 2\ {}'a\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi;$$
$$FL = {}'a\ \text{tang.}\ \varphi\ \text{Sec.}\ \alpha_{,};$$

und substituirt man diese Werthe, so entsteht

$$\text{Sec.}\ \varphi^2 - 2\ \text{Sec.}\ \varphi + 1 = \text{tang.}\ \varphi^2 + 4\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi^2$$
$$- 4\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi\ \text{tang.}\ \varphi\ \text{Sec.}\ \alpha_{,}.\ \text{Cos.}\ {}'\alpha;$$

oder

$$\frac{1 - \text{Cos.}\ \varphi}{\text{Cos.}\ \varphi} = -2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2 + 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varphi\ \text{tg.}\ \varphi\ \text{Sec.}\ \alpha_{,}\ \text{Cos}\ {}'\alpha$$

oder auch, weil $1 - \text{Cos.}\ \varphi = 2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi^2$ ist,

$$\frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ \varphi}{\text{Cos.}\ \varphi} = -\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \text{tang.}\ \varphi\ \text{Sec.}\ \alpha_{,}\ \text{Cos.}\ {}'\alpha;$$

also

$$\text{Cos.}\ {}'\alpha = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ \varphi\ (1 + \text{Cos.}\ \varphi)}{\text{Sin.}\ \varphi}\ \text{Cos.}\ \alpha_{,}$$

oder

$$\text{Cos.}\ {}'\alpha = \text{Cos.}\ \frac{\varphi}{2}\ \text{Cos.}\ \alpha_{,}$$

folglich

$$a_{,} = 2\ {}'a\ \text{Sin.}\ \frac{\varphi}{2}\ \text{Cos.}\ \frac{\varphi}{2}\ \text{Cos.}\ \alpha_{,}$$

oder

$$a_{,} = {}'a\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \alpha_{,}.$$

Eben so hat man, weil für jede der Richtungs-

linien A'; B' u. s. w. φ und $\alpha_{,}$ dieselben Größen bleiben

$$b_{,} = {}'b \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \alpha_{,}$$

$$c_{,} = {}'c \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \alpha_{,} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun diese Werthe in die Voraussetzung

$$Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots\ldots = o;$$

so entsteht

$$[{}'aA + {}'bB + \ldots\ldots] \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \alpha_{,} = o,$$

und hieraus

$${}'aA + {}'bB + \ldots\ldots = o$$

wie zu beweisen war.

Beweis III. In Beziehung auf vollkommenes Gleichgewicht.

Ist in Beziehung auf fortgehende Bewegung

$$Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots\ldots = o;$$

so folgt daraus nach I.

$$A + B + \ldots\ldots = o.$$

Ist in Beziehung auf drehende Bewegung um $_{,}l$

$$Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots\ldots = o;$$

so folgt daraus nach II.

$${}'aA + {}'bB + \ldots\ldots = o;$$

oder auch nach §. 64

$$Aa' + Bb' + \ldots\ldots = o.$$

Eben so ist in Beziehung auf l' aus

$$Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots\ldots = o$$

die Folgerung zu ziehen, daß auch

$${}_{,}aA + {}_{,}bB + \ldots\ldots = o$$

sein muß, und aus diesen 3 bewiesenen Gleichungen

$$A + B + \ldots\ldots = 0$$
$$Aa' + Bb' + \ldots\ldots = 0$$
$$,aA + ,bB + \ldots\ldots = 0$$

folgt nach §. 62, daß vollkommenes Gleichgewicht statt findet.

§. 67. Lehrsatz. „Wenn Kräfte parallel in verschiedenen Ebenen wirken, und ein vollkommenes Gleichgewicht untereinander erhalten, so ist die algebraische Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf jede Bewegung des Systems = 0; oder

Behauptung. $Aa_, + Bb_, + \ldots\ldots = 0$.

Voraussetzung. Es ist vollkommenes Gleichgewicht.

Beweis. Weil Gleichgewicht statt findet, so ist

$$A + B + \ldots\ldots = 0;$$

also auch, weil in Beziehung auf fortgehende Bewegung,

$$a_, = b_, = c_, \text{ u. s. w. ist,}$$
$$Aa_, + Bb_, + \ldots\ldots = 0$$

Ferner ist, in Beziehung auf jede Achse l',

$$'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0;$$

also auch,

$$A\,'a \operatorname{Sin.}\varphi \operatorname{Cos.}\alpha_, + B\,'b \operatorname{Sin.}\varphi \operatorname{Cos.}\alpha_, + \ldots\ldots = 0$$

oder, nach dem vorigen §.

$$Aa_, + Bb_, + \ldots\ldots = 0.$$

Anmerk. Der letzte Satz kann auch so ausgedrückt werden: Entsteht keine fortgehende Bewegung, so ist in Beziehung auf sie, die algebraische Summe der mechanischen Momente = 0; und entsteht keine drehende um irgend eine Achse l; so ist in Beziehung auf diese Drehung die algebraische Summe der mechanischen Momente = 0.

§. 68. Zusatz. Das Prinzip von den virtuellen Geschwindigkeiten gilt also auch vollkommen für parallel wirkende Kräfte in verschiedenen Ebenen. §. 58.

Anwendungen der Lehren des zweiten Abschnitts.

Aufgabe I. Es sei $A = 10$; $B = 6$; $C = -8$; $D = -4$; $a' = 0$; $b' = 0$; $c' = 6$; $d' = -4$; $,a = -5$; $,b = 0$; $,c = 2$; $,d = 8$. Man soll die mittlere Kraft (D) und ihre durch (d′) und (,d) sich ergebende Stelle bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$(D) = 10 + 6 - 8 - 4 = 4$$

$$(d') = \frac{-8.6 + 4.4}{4} = -8$$

$$(,d) = \frac{-10.5 - 8.2 - 4.8}{4} = -24\tfrac{1}{2}$$

Bringt man in der gefundenen Stelle statt $(D) = 4$ eine Kraft $E = -4$ an, so sind die Kräfte $A = 10$; $B = 6$; $C = -8$; $D = -4$; $E = -4$ unter einander im vollkommenen Gleichgewicht.

Aufgabe II. Eine Kraft A wirkt gegen eine Ebene △ unter einem Neigungswinkel von 30°; ihre Projection macht mit einer in △ angenommenen Linie ,l einen Winkel von 45°; a' ist $= 10$; man soll den Hebelsarm $'a$ von A in Beziehung auf ,l bestimmen.

Auflösung. Hier ist $\alpha = 30°$; $a' = 45°$; $a' = 10$; also

$$'a = \frac{10 \text{ Sin. } 30}{\sqrt{1 - \text{Cos. } 30^2 . \text{ Cos. } 45^2}} = 6,32.$$

Aufgabe III. Mehrere Kräfte $A = 6$; $B = 8$; $C = -5$ wirken normal auf eine Ebene Λ, welche nur um eine feste Achse $_{,}l$ drehbar ist. Es ist in Beziehung auf $_{,}l$; $a' = {}'a = 7$; ${}'b = b' = -3$; $c' = {}'c = -2$; man soll in der Entfernung $d' = {}'d = -4$; die Größe der zur Herstellung des unvollkommenen Gleichgewichts erforderlichen Kraft D bestimmen.

Auflösung. Hier ist blos

$$6.\,7 - 8.\,3 + 5.\,2 - D.\,4 = 0;$$

woraus $D = 7$ folgt.

Aufgabe IV. Welchen Druck erleidet in der vorigen Aufgabe die feste Achse $_{,}l$?

Auflösung. Er ist

$$= 6 + 8 - 5 + 7 = 16.$$

Aufgabe V. Wenn, in Beziehung auf die Aufgaben III und IV, auf $_{,}l$ gemessen,

$$_{,}a = 0;\ _{,}b = 6;\ _{,}c = -2$$

ist, und man bringt die zu Erzeugung des unvollkommenen Gleichgewichts erforderliche gefundene Kraft $D = 7$ so an, daß $_{,}d = 4$ wird, an welcher Stelle erleidet dann $_{,}l$ den Druck $= 16$?

Auflösung. Hier ist, wenn man die Entfernung von a bis zu dieser Stelle mit x bezeichnet,

$$A.\,0 + 8.\,6 + 10 + 7.\,4 - 16.\,x = 0;$$

folglich

$$x = 5\tfrac{3}{8}.$$

Es sind daher die Kräfte

$$A = 6;\ B = 8;\ C = -5;\ D = 7;\ E = -16$$

an den durch die folgenden rechtwinklichten Coordinaten bestimmten Stellen

$,a = 0;\ ,b = 6;\ ,c = -2;\ ,d = 4;\ ,e = 5\tfrac{3}{8}$

$a' = 7;\ b' = -3;\ c' = -2;\ d' = -4;\ e' = 0$

im vollkommenen Gleichgewicht untereinander.

Aufgabe VI. Eine feste Dreiecksebene $\triangle$, deren Grundlinie $= b$; deren Höhe $= h$ ist, wird in allen ihren Puncten von parallel wirkenden gleichgroßen Kräften angegriffen, deren Summe $= Q$ sein mag; man soll die Stelle für die mittlere Kraft angeben.

Auflösung. Man nehme $,l$ in b; ziehe in $\triangle$ parellel mit b in der Entfernung x eine Linie y; so ist die Summe der Kräfte, welche auf den Elementarstreifen $y.dx$ wirken, $= \frac{2Q\,y\,dx}{b\,h}$; wie sich aus der Projection

$$\tfrac{1}{2} b\,h : y\,dx = Q : 4^{ten}\ \text{Glied}$$

ergiebt. Setzt man nun die Entfernung von $,l$ bis zu der Stelle, wo die mittlere Kraft Q die Ebene $\triangle$ schneidet $= q'$; so hat man

$$q' = \frac{\int x . \frac{2Q\,y\,dx}{b\,h} \text{ für } x = h;}{Q}$$

oder, weil $b : y = h : h - x$;

$$q' = \frac{\frac{2Q}{h^2} . \int (h - x)\,x\,dx \text{ für } x = h}{Q}$$

$$= \frac{2}{h^2} \left(\tfrac{1}{2} h\,x^2 - \tfrac{1}{3} x^3\right) \text{ für } x = h$$

oder $$q' = \tfrac{1}{3} h.$$

Eben so ergiebt sich der Abstand des gesuchten Punctes von jeder andern Seite.

Aufgabe VII. Ein zum Halbmesser r und Mittelpunctswinkel 2α gehöriger Kreisbogen wird in allen seinen Puncten von parallel wirkenden gleichgroßen Kräften, deren Summe = Q sein mag, angegriffen, man soll q′ in Beziehung auf die Linie ,l bestimmen, welche parallel mit der zum Bogen gehörigen Sehne durch den Mittelpunct des Kreises gezogen ist.

Auflösung. Bezeichnet man den zum Mittelpunctswinkel 2α gehörigen Bogen für den Halbmesser 1 mit 2δ, so ist der Bogen selbst $= 2r\delta$; halbirt man nun denselben, und nimmt auf ihn von seinem Mittelpunct aus einem Bogen $= r.x$, so wirkt auf $r.dx$ eine Kraft $= \frac{Q.dx}{2\delta}$ in der Entfernung $r\,\mathrm{Cos.}\,x$ von ,l; man hat also

$$q' = \frac{2\int \frac{Q\,dx}{2\delta}.\ r\ \mathrm{Cos.}\ x \text{ für } x = \delta}{Q}$$

$$= \frac{\frac{2rQ}{2\delta} \int \mathrm{Cos.}\ x\,dx \text{ für } x = \delta}{Q}$$

$$= \frac{r\ \mathrm{Sin.}\ x}{\delta} \text{ für } x = \delta$$

$$= \frac{r\ \mathrm{Sin.}\ \delta}{\delta}$$

Dritter Abschnitt.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte, welche nach verschiedenen Richtungen in ein festes System von Puncten wirken, welche mit den Richtungslinien der Kräfte alle in eine Ebene △ fallen.

Des dritten Abschnitts erste Abtheilung.

Vom unvollkommenen Gleichgewicht in Beziehung auf eine feste Drehachse, welche die Ebene △ in irgend einem Punct π normal schneidet; und vom vollkommenen Gleichgewicht in dem Fall, wenn die Richtungslinien der Kräfte sich alle in einem und denselben Punct p schneiden.

Bezeichnungen in dieser Abtheilung.

△ drücke die feste Ebene aus, in welcher alle von Kräften angegriffenen Punkte, und zugleich die Richtungslinien dieser Kräfte liegen.

π einen Punct in △.

l eine feste Achse, welche △ in π normal durchschneidet. (*Fig.* 11).

A; B; C u. s. w. die Größe der nach verschiedenen Richtungen in △ wirkenden Kräfte.

A′; B′; C′ u. s. w. ihre Richtungslinien.

′a; ′b; ′c u. s. w. ihre Hebelsarme in Beziehung auf l.

l′ eine durch π in △ gezogene Linie, welche die Linien A′; B′; C′ . . . u. s. w. durchschneidet.

a; b; c u. s. w. die Durchschnittspuncte von A′; B′; C′ u. s. w. mit l′.

,a; ,b; ,c u. s. w. die Abstände πa; πb; πc u. s. w.

α; β; γ u. s. w. die Neigungswinkel von A′; B′; C′ u. s. w. gegen l′.

---

§. 69. Lehrsatz. Wenn in einer festen Ebene △, welche nur um eine sie in π normal treffende feste Achse l gedreht werden kann, mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken, und es ist die algebr. Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf l = o, so findet die erwähnte Drehung nicht statt, oder:

Behauptung. Es erfolgt keine Drehung um l.

Voraussetzung. ′aA + ′bB + ... = o.

Beweis. Man beschreibe aus π in △ (*Fig.* 11.) mit ′a; ′b; ′c u. s. w. Kreisbogen, bis sie l′ schneiden, so kann man sich, ohne daß das Bestreben, △ um l zu drehen, im Geringsten eine Aenderung erleidet, die Kräfte A; B; C u. s. w. in diesen Schneidungspuncten tangential, zur Drehung nach derselben Richtung, thätig denken (§. 35.); dann erscheinen

aber A′; B′ u. s. w. normal auf l′, also parallel, und wenn Kräfte parallel in einer Ebene wirken, und es ist

$$'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0;$$

so erfolgt keine Drehung um l; (I. Abschnitt). Also wird auch in der ursprünglichen Lage der Linien A′; B′ u. s. w. keine Drehung um l erfolgen, weil der Voraussetzung gemäß $'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0$ ist, und die Kräfte A; B u. s. w. in beiden Lagen einerlei Bestreben in Beziehung auf Drehung um l, äußern. Die Kräfte A; B u. s. w. sind also im unvollkommenen Gleichgewicht untereinander.

§. 70. Lehrsatz. Wenn in einer festen Ebene △, welche nur um eine sie in π normal treffende Achse l gedreht werden kann, mehrere Kräfte nach verschiedener Richtung wirkend, einander im unvollkommenen Gleichgewicht erhalten, d. h. keine Drehung um l erzeugen, so ist auch die algebraische Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf l = 0, oder:

Behauptung. $'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0.$

Voraussetzung. Es erfolgt keine Drehung um l. (*Fig.* 11).

Beweis. Erfolgt keine Drehung um l, so wird auch dann noch keine statt finden, wenn man wie im vorigen §. die Kreise beschreibt, und die Kräfte sich normal auf l′, also parallel an denselben Hebelsarmen wirkend denkt. In dieser Lage ist aber, weil unvollkommenes Gleichgewicht da ist,

$$'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0;$$

also auch in der ursprünglichen, weil in beiden das Bestreben, △ um l zu drehen, unverändert dasselbe ist.

§. 71. Lehrsatz. Wenn die Richtungslinien mehrerer Kräfte in einer Ebene △ sich alle in einem und denselben Punct p schneiden, und es ist in Beziehung auf irgend eine durch p in △ gezogene gerade Linie l′ *(Fig.* 12*)* die Summe der Producte aus den Kräften in die Sinusse der Winkel, welche ihre Richtungslinien mit l′ bilden, = o, und auch zugleich die Summe der Producte aus den Kräften in die Cosinusse dieser Winkel = o; so gelten zwei solche Gleichungen auch für jede andere Linie durch p in △, welche mit l′ irgend einen Winkel φ bildet, oder:

Behauptung.

1) $A \sin.(\alpha + \varphi) + B \sin.(\beta + \varphi) + \ldots\ldots = o.$

2) $A \cos.(\alpha + \varphi) + B \cos.(\beta + \varphi) + \ldots\ldots = o.$

Voraussetzung.

1) $A \sin.\alpha + B \sin.\beta + \ldots\ldots = o.$

2) $A \cos.\alpha + B \cos.\beta + \ldots\ldots = o.$

Beweis. Multiplicirt man die erste Voraussetzung mit Cos. φ, die zweite mit Sin. φ, so giebt die Summe beider Producte die erste Behauptung. Multiplicirt man aber die zweite mit Cos. φ, die erste mit Sin. φ und subtrahirt letzteres Product von ersterem, so ergiebt sich die Richtigkeit der zweiten Behauptung.

§. 72. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte, deren Richtungslinien sich alle in einem und denselben Punct p schneiden, in einer Ebene △ wirken, *(Fig.* 12*)* und

es sind die algebr. Summen der Producte aus den Kräften in die Sinusse und in die Cosinesse der Winkel, welche ihre Richtungslinien mit irgend einer in △ durch p gezogenen Linie l′ bilden, jede = o; so stehen die Kräfte untereinander im vollkommen Gleichgewicht, oder:

Behauptung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Voraussetzung.

1) $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots . = 0.$

2) $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots . = 0.$

Beweis. Es muß gezeigt werden können, daß die Kräfte bei den angegebenen Voraussetzungen dem Punct p nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zur Bewegung mittheilen, d. h. daß in Beziehung auf jeden Punct π in △, auch in unendlicher Ferne gedacht, die algebr. Summe der statischen Momente der Kräfte gleich o ist. Die eigentliche Behauptung ist also folgende:

Es ist in Beziehung auf jede Achse l, welchen △ normal schneidet, in welchem Punct π sie auch die Ebene △ durchschneiden mag,

$$'aA + 'bB + \ldots . = 0.$$

1stens. Denkt man sich in l′ irgendwo einen Punct π, und setzt $\pi p = e$; so folgt aus der ersten Voraussetzung

$$A \, e \text{ Sin. } \alpha + B \, e \text{ Sin. } \beta + \ldots . = 0.$$

Er ist aber

$$e \text{ Sin. } \alpha = {}'a$$
$$e \text{ Sin. } \beta = {}'b$$

u. s. w. folglich

$${}'aA + {}'b\,B + \ldots . = o.$$

2tens. Aus den beiden Voraussetzungen folgt nach §. 71, daß auch für jede andere durch p in △ gezogene Linie l'' welche mit l' irgend einen Winkel φ bildet,

$A \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) + B \text{ Sin. } (\beta + \varphi) + \ldots . = o$ ist.

Nimmt man nun in l'' irgendwo einen Punct π' an, und setzt $\pi' p = e$; so hat man also auch

$$A\,e \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) + B\,e \text{ Sin. } (\beta + \varphi) + \ldots . = o.$$

Es ist aber in Bezeihung auf die Achse, welche △ in π' normal schneidet,

$$e \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) = {}'a$$
$$e \text{ Sin. } (\beta + \varphi) = {}'b$$

u. s. w. folglich auch

$${}'aA + {}'bB + \ldots . = o,$$

und hieraus erhellet, daß immer, wo auch eine Achse normal auf △ gedacht wird,

$${}'aA + {}'bB + \ldots . = o \text{ ist.}$$

3tens. Die Kräfte A; B; C u. s. w. theilen also dem Punct p nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zu einer drehenden Bewegung mit. Jede drehende Bewegung, die der Punct p in Beziehung auf einen Drehpunct π aber annehmen könnte, ist im ersten Augenblick als ein Bestreben anzusehen, der Richtung der Tangente zu folgen. Da nun nach keiner einzigen solchen Richtung eine solche Thätigkeit

sich äußert, so wird auch kein Punct π' der Ebene einen Druck erleiden. Die Kräfte erhalten also untereinander ein vollkommenes Gleichgewicht.

§. 73. Lehrsatz. Sind mehrere Kräfte in einer Ebene Δ, und in einem Punct p untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, so sind auch in Beziehung auf jede durch p gehende Linie in Δ die Summen der Producte aus den Kräfte in die Sin. sowohl als in die Cosin. der Winkel, welche diese Linien mit den Richtungslinien der Kräfte bilden, jede = o, oder:

Behauptung.

1) $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0.$

2) $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots = 0.$

Voraussetz. Es ist vollkommenes Gleichgewicht.

Beweis. 1stens. Wenn vollkommenes Gleichgewicht statt findet, so ist auch kein Bestreben da, um irgend eine Achse Drehung hervorzubringen. Es ist also für jede Achse l

$$'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0.$$

Nun ist aber auch

$$'a = ,a \text{ Sin. } \alpha.$$

$$'b = ,b \text{ Sin. } \beta.$$

$$'c = ,c \text{ Sin. } \gamma$$

u. s. w. und zugleich auch

$$,a = ,b = ,c \text{ u. s. w.} = \pi p;$$

folglich

$$\pi p \text{ A Sin. } \alpha + \pi p \text{ B Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0;$$

oder auch

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0.$$

2tens.

2tens. Eben so läßt sich beweisen, daß auch
$A \operatorname{Sin} (\alpha + \varphi) + B \operatorname{Sin}. (\beta + \varphi) + \ldots . = o$
ist.

3tens. Löst man in der in 2) bewiesenen Gleichung die Clammern auf und ordnet sie, so entsteht

$$[A \operatorname{Sin}. \alpha + B \operatorname{Sin}. \beta + \ldots] \operatorname{Cos}. \varphi + [A \operatorname{Cos}. \alpha + B \operatorname{Cos}. \beta + \ldots] \operatorname{Sin}. \varphi = o;$$

und weil nach dem ersten Theil des Beweises

$$A \operatorname{Sin}. \alpha + B \operatorname{Sin}. \beta + \ldots . = o \text{ ist,}$$

so ergiebt sich also

$$(A \operatorname{Cos}. \alpha + B \operatorname{Cos}. \beta + \ldots .] \operatorname{Sin}. \varphi = o;$$

oder

$$A \operatorname{Cos}. \alpha + B \operatorname{Cos}. \beta + \ldots . = o.$$

§. 74. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte B; C u. s. w. in einer Ebene $\triangle$ in einem Punct p angreifend, kein Gleichgewicht erzeugen, und man bezeichnet die entgegengesetzt mittlere derselben mit A; den Neigungswinkel ihrer durch p gehenden Richtungslinien mit einer angenommenen Linie l' in $\triangle$ durch p mit α; so ist

$$A = \pm \sqrt{[B \operatorname{Sin} \beta + C \operatorname{Sin} \gamma + \ldots]^2 + [B \operatorname{Cos} \beta + C \operatorname{Cos}. \gamma + \ldots]^2}$$

und

$$\operatorname{tg}. \alpha = \frac{B \operatorname{Sin}. \beta + C \operatorname{Sin}. \gamma + \ldots .}{B \operatorname{Cos}. \beta + C \operatorname{Cos}. \gamma + \ldots .}$$

Beweis. Es erhält A mit B, C u. s. w. vollkommnes Gleichgewicht, wenn

1stens $A \operatorname{Sin}. \alpha + B \operatorname{Sin}. \beta + \ldots . = o$ und

2tens $A \operatorname{Cos}. \alpha + B \operatorname{Cos}. \beta + \ldots . = o$ ist.

Aus 1) entspringt

$$A^2 \text{Sin.} \alpha^2 = [B \text{ Sin.} \beta + C \text{ Sin.} \gamma + \ldots .]^2$$

aus 2) aber

$$A^2 \text{Cos.} \alpha^2 = [B \text{ Cos.} \beta + C \text{ Cos.} \gamma + \ldots .]^2$$

und die Summe beider giebt

$$A^2 (\text{Sin.} \alpha^2 + \text{Cos.} \alpha^2) \text{ oder}$$

$$A^2 = [B \text{ Sin.} \beta + C \text{ Sin.} \gamma + ..]^2 + [B \text{ Cos.} \beta + C \text{ Cos.} \gamma + ..]^2$$

also

$$A = \pm \sqrt{[B \text{ Sin} \beta + C \text{ Sin} \gamma + ..]^2 + [B \text{ Cos} \beta + C \text{ Cos} \gamma + ..]^2}$$

Entwickelt man, wie eben, aus 1) A Sin. α; aus 2) A Cos. α und dividirt dann, so entsteht

$$\frac{\text{Sin.} \alpha}{\text{Cos.} \alpha} \text{ oder}$$

$$\text{tg.} \alpha = \frac{B \text{ Sin.} \beta + C \text{ Sin.} \gamma + \ldots .}{B \text{ Cos.} \beta + C \text{ Cos.} \gamma + \ldots .}$$

§. 75. Zusatz. Sind nur zwei Kräfte B und C thätig, so ist ihre entgegengesetzt mittlere oder

$$A = - \sqrt{[B \text{ Sin} \beta + C \text{ Sin} \gamma]^2 + [B \text{ Cos} \beta + C \text{ Cos} \gamma]^2} \text{ (Fig. 13.)}$$

$$= - \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC (\text{Cos.} \beta \text{ Cos.} \gamma + \text{Sin.} \beta \text{ Sin.} \gamma)}$$

oder

$$A = - \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC \text{ Cos.} (\beta - \gamma)}.$$

Weil aber $\beta - \gamma$ = dem Winkel φ ist, welchen B' und C' bilden, so hat man also

$$A = - \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC \text{ Cos.} \varphi}$$

und die mittlere Kraft selbst

$$= + \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC \text{ Cos.} \varphi}.$$

Die Richtung von A bestimmt sich ferner durch

$$\text{tg.} \alpha = \frac{B \text{ Sin.} \beta + C \text{ Sin.} \gamma}{B \text{ Cos.} \beta + C \text{ Cos.} \gamma}$$

oder weil $\text{tg.} \alpha = \frac{\text{Sin.} \alpha}{\text{Cos.} \alpha}$ ist, durch

$$B \,\mathrm{Sin.}\, \alpha \,\mathrm{Cos.}\, \beta + C \,\mathrm{Sin.}\, \alpha \,\mathrm{Cos.}\, \gamma = B \,\mathrm{Sin.}\, \beta \,\mathrm{Cos.}\, \alpha + C \,\mathrm{Sin.}\, \gamma \,\mathrm{Cos.}\, \alpha$$

oder durch

$$C \,\mathrm{Sin.}\, (\alpha - \gamma) = B \,\mathrm{Sin.}\, (\beta - \alpha)$$

oder durch

$$C : B = \mathrm{Sin.}\, \lambda : \mathrm{Sin.}\, \varrho$$
$$= \mathrm{Sin.}\, \lambda : \mathrm{Sin.}\, (\varphi - \lambda).$$

Des dritten Abschnitts zweite Abtheilung.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts dreier Kräfte, insbesondere für den Fall, daß sich ihre in einer Ebene △ liegenden Richtungslinien alle in einem und denselben Punct p schneiden.

Bezeichnungen in dieser Abtheilung.

△ drücke die Ebene aus, in welcher die Richtungslinien der 3 Kräfte liegen.

p den Punct in △, in welchen alle drei angreifen.

A; B; C die Größe der Kräfte. *(Fig. 14.)*

A′; B′; C′ ihre Richtungslinien.

a; b; c die drei Winkel, welche B′ und C′; A′ und C′; A′ und B′ miteinander in p bilden.

l′ eine Linie in △ durch p.

α; β; γ die Winkel, welche A′; B′; C′ mit l′ in p bilden.

---

§. 76. **Lehrsatz.** Wenn 3 Kräfte, A; B; C in einer Ebene △ und einen Punct p angreifen, und es finden von folgenden 9 Gleichungen

$$\text{I.}\ \begin{cases} 1)\ A : B = \text{Sin. a} : \text{Sin. b} \\ 2)\ A : C = \text{Sin. a} : \text{Sin. c} \\ 3)\ B : C = \text{Sin. b} : \text{Sin. c} \end{cases}$$

oder $A : B : C = \text{Sin. a} : \text{Sin. b} : \text{Sin. c}$

$$\text{II.}\ \begin{cases} 4)\ A = -B\ \text{Cos. c} - C\ \text{Cos. b} \\ 5)\ B = -A\ \text{Cos. c} - C\ \text{Cos. a} \\ 6)\ C = -A\ \text{Cos. b} - B\ \text{Cos. a} \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} 7)\ A^2 = B^2 + C^2 + 2BC\ \text{Cos. a} \\ 8)\ B^2 = A^2 + C^2 + 2AC\ \text{Cos. b} \\ 9)\ C^2 = B^2 + C^2 + 2AB\ \text{Cos. c} \end{cases}$$

zwei statt, so sind diese 3 Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

Beweis. Die 3 Kräfte sind nach §. 72. im vollkommenen Gleichgewicht, wenn in Beziehung auf irgend eine Linie l′

$$A\ \text{Sin.}\ \alpha + B\ \text{Sin.}\ \beta + C\ \text{Sin.}\ \gamma = 0 \text{ und}$$

$$A\ \text{Cos.}\ \alpha + B\ \text{Cos.}\ \beta + C\ \text{Cos.}\ \gamma = 0 \text{ ist.}$$

Nimmt man nun l′ in A′; so ist

$$\alpha = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - c$$

$$\gamma = b + 180^\circ$$

folglich $\text{Sin.}\ \alpha = 0;\ \text{Cos.}\ \alpha = -1;$

$\text{Sin.}\ \beta = \text{Sin. c};\ \text{Cos.}\ \beta = -\text{Cos. c};$

$\text{Sin.}\ \gamma = -\text{Sin. b};\ \text{Cos.}\ \gamma = -\text{Cos. b}.$

Es verwandeln sich daher jene 2 Gleichungen in folgende zwei:

$$N. \begin{cases} B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b; \\ A = -B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos } b. \end{cases}$$

Nimmt man l′ in B′; so verwandeln sie sich in

$$M. \begin{cases} A \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } a \text{ und} \\ B = -A \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a; \end{cases}$$

und wenn man l′ in C′ annimmt, so erhalten sie die Gestalt

$$P. \begin{cases} A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a \\ C = -A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a. \end{cases}$$

Es ist also nichts weiter nöthig, als zu zeigen, daß, wenn 2 der 9 Gleichungen des Lehrsatzes gegeben sind, daß daraus entweder die beiden N, oder die beiden M, oder die beiden P folgen. Der Beweis selbst wird also nun rein trigonometrisch und zerlegt sich, je nachdem man 2 der Voraussetzungen wählt, in 9 verschiedene Fälle.

I. Voraussetzung.

$$A : B : C = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b : \text{Sin. } c.$$

Beweis. Es ist $\text{Sin. } a = -\text{Sin. } (b + c)$

$$= -\text{Sin. } b \text{ Cos. } c - \text{Cos. } b \text{ Sin. } c;$$

also hat man

$$A : B = -\text{Sin. } b \text{ Cos. } c - \text{Cos. } b \text{ Sin. } c : \text{Sin. } b;$$

folglich

$$A \text{ Sin. } b = -B \text{ Sin. } b \text{ Cos. } c - B \text{ Sin. } c \text{ Cos. } b.$$

Aus der Voraussſ. $B : C = \text{Sin. } b : \text{Sin. } c$ folgt aber

$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b, \text{ und daher ist}$$

$$A \text{ Sin. } b = -B \text{ Sin. } b \text{ Cos. } c - C \text{ Sin. } b \text{ Cos. } b,$$

oder $A = -B \text{ Cos. } c - C. \text{ Cos. } b,$

welches die eine zu beweisende Gleichung in N ist;

die 2te B Sin. c = C Sin. b folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

II. Voraussetzung.

1) A : B = Sin. a : Sin. b;

2) A = — B Cos. c — C Cos. b.

Beweis. Aus 1) folgt unmittelbar

A Sin. b = B Sin. a

welches die eine Behauptung in P ist; um die 2te in P, nemlich C = — A Cos. b — B Cos. a aus den Voraussetzungen zu folgern, so hat man

Cos. c = Cos. (a + b) also in 2)

A = — C Cos. a Cos. b + B Sin. a Sin. b — C Cos. b.

Setzt man hierin A Sin. b für B Sin. a aus 1), so entsteht

A = — B Cos. a Cos. b + A Sin. b² — C Cos. b;

oder

A Cos. b² = — B Cos. a Cos. b — C Cos. b;

und hieraus

C = — A Cos. b — B Cos a.

III. Voraussetzung.

1) A : B = Sin. a : Sin. b;

2) C = — A Cos. b — B Cos. a.

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar, wenn man l' in C' annimmt. Siehe P.

IV. Voraussetzung.

1) A : B = Sin. a : Sin. b;

2) A² = B² + C² + 2 B C C

Beweis. Nimmt man l' in C',

erste Behauptung in P sogleich

führung der zweiten $C = -A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a$ für dasselbe D hat man

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a \text{ und}$$

$$A^2 \text{ Sin. } b^2 = B^2 \text{ Sin. } a^2 \text{ also}$$

$$A^2 \text{ Cos. } b^2 = [B \text{ Cos. } a + C]^2,$$

und hieraus $C = -A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a.$

V. Voraussetzung.

1) $A : B = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b$

2) $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \text{ Cos. } c.$

Beweis. Aus 1) folgt sogleich

$$A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a.$$

Um $C = -A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a$ aus den Voraussetzungen zu folgern, hat man

$$\text{Cos. } c = \text{Cos. } (a + b), \text{ also}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b - 2AB \text{ Sin. } a \text{ Sin. } b.$$

Subtrahirt man hievon

$$0 = (A \text{ Sin. } b - B \text{ Sin. } a)^2, \text{ so entsteht}$$

$$C^2 = A^2 \text{ Cos. } b^2 + B^2 \text{ Cos. } a^2 + 2AB \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b,$$

oder $C = -A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a.$

VI. Voraussetzung.

1) $A = -B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b$

2) $B = -A \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a$

Bew[illegible] Für [illegible]

haup[illegible]

[illegible] oder

$A \text{ Sin. } c^2 = C \text{ Cos. } a \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a$
$\text{Cos. } c + C \text{ Sin. } a \text{ Sin. } c$; oder
$$A \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } a.$$

VII. Voraussetzung.

$$1)\ A = - B \text{ Cos. } c. - C \text{ Cos. } b;$$
$$2)\ A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a.$$

Beweis. Für l′ in A′ hat man die erste Behauptung in N sogleich in der ersten Voraussetzung. Um die zweite
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$$
für dasselbe l′ aus den Voraussetzungen zu folgern, setze man Cos. (b + c) für Cos. a in 2); und den Werth für A aus 1) in 2); so entsteht
$$o = B^2 \text{ Sin. } c^2 + C^2 \text{ Sin. } b^2 - 2 B C \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c;$$
oder $o = B \text{ Sin. } c - C \text{ Sin. } b$; also
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b.$$

VIII. Voraussetzung.

$$1)\ A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos } b;$$
$$2)\ B^2 = A^2 + C^2 + 2 A C \text{ Cos. } b.$$

Beweis. Die erste Voraussetzung stimmt schon vollkommen mit der zweiten Behauptung in N; zur Begründung der ersten
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$$
setze man den Werth für A aus 1) in 2); so entsteht
$$B^2 = B^2 \text{ Cos. } c^2 + 2 B C \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c + C^2 \text{ Cos. } b^2 + C^2 - 2 B C \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c - 2 C^2 \text{ Cos. } b^2$$
oder $B^2 \text{ Sin. } c^2 = C^2 \text{ Sin. } b^2$ also
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b.$$

IX. Voraussetzung.

1) $A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a$;

2) $B^2 = A^2 + C^2 + 2 A C \text{ Cos. } b$.

Beweis. Man addire beide Voraussetzungen, so entsteht

$$o = 2 C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a + 2 A C \text{ Cos. } b.$$

oder $C = - B \text{ Cos. } a - A \text{ Cos. } b$,

welches die zweite Behauptung in P ist. Zur Beweisführung der ersten

$$A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a$$

verfahre man nun ganz wie in VIII.

§. 77. Lehrsatz. Wenn 3 Kräfte, A; B; C; in einer Ebene so wirken, daß ihre Richtungslinien A′; B′; C′ in einem Punct p zusammenstoßen, und diese Kräfte sind untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, so finden auch die im Lehrsatz des vorigen §. angegebenen 9 Gleichungen sämmtlich statt.

Beweis. Stehen die Kräfte im vollkommenen Gleichgewicht, so ist nach §. 73 für jede in △ durch p gezogene Linie l′

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + C \text{ Sin. } \gamma = o \text{ und}$$
$$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + C \text{ Cos. } \gamma = o.$$

Hieraus entspringt, für l′ in A′:

1) $B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$

2) $A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b$;

für l′ in B′:

3) $A \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } a$

4) $B = - A \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a$;

und für l′ in C′:

aber A'; B' u. s. w. normal auf l', also parallel, und wenn Kräfte parallel in einer Ebene wirken, und es ist

$$'aA + 'bB + \ldots = 0;$$

so erfolgt keine Drehung um l; (I. Abschnitt). Also wird auch in der ursprünglichen Lage der Linien A'; B' u. s. w. keine Drehung um l erfolgen, weil der Voraussetzung gemäß $'aA + 'bB + \ldots = 0$ ist, und die Kräfte A; B u. s. w. in beiden Lagen einerlei Bestreben in Beziehung auf Drehung um l, äußern. Die Kräfte A; B u. s. w. sind also im unvollkommenen Gleichgewicht untereinander.

§. 70. Lehrsatz. Wenn in einer festen Ebene Δ, welche nur um eine sie in π normal treffende Achse l gedreht werden kann, mehrere Kräfte nach verschiedener Richtung wirkend, einander im unvollkommenen Gleichgewicht erhalten, d. h. keine Drehung um l erzeugen, so ist auch die algebraische Summe ihrer statischen Momente in Beziehung auf $l = 0$, oder:

Behauptung. $'aA + 'bB + \ldots = 0.$

Voraussetzung. Es erfolgt keine Drehung um l. (*Fig.* 11).

Beweis. Erfolgt keine Drehung um l, so wird auch dann noch keine statt finden, wenn man wie im vorigen §. die Kreise beschreibt, und die Kräfte sich normal auf l', also parallel an denselben Hebelsarmen wirkend denkt. In dieser Lage ist aber, weil unvollkommenes Gleichgewicht da ist,

$$'aA + 'bB + \ldots = 0;$$

also auch in der ursprünglichen, weil in beiden das Bestreben, △ um l zu drehen, unverändert dasselbe ist.

§. 71. **Lehrsatz.** Wenn die Richtungslinien mehrerer Kräfte in einer Ebene △ sich alle in einem und denselben Punct p schneiden, und es ist in Beziehung auf irgend eine durch p in △ gezogene gerade Linie l′ *(Fig. 12)* die Summe der Producte aus den Kräften in die Sinusse der Winkel, welche ihre Richtungslinien mit l′ bilden, = o, und auch zugleich die Summe der Producte aus den Kräften in die Cosinusse dieser Winkel = o; so gelten zwei solche Gleichungen auch für jede andere Linie durch p in △, welche mit l′ irgend einen Winkel φ bildet, oder:

Behauptung.

1) $A \text{ Sin.} (\alpha + \varphi) + B \text{ Sin.} (\beta + \varphi) + \ldots . = o.$

2) $A \text{ Cos.} (\alpha + \varphi) + B \text{ Cos.} (\beta + \varphi) + \ldots . = o.$

Voraussetzung.

1) $A \text{ Sin.} \alpha + B \text{ Sin.} \beta + \ldots . = o.$

2) $A \text{ Cos.} \alpha + B \text{ Cos.} \beta + \ldots . = o.$

Beweis. Multiplicirt man die erste Voraussetzung mit Cos. φ, die zweite mit Sin. φ, so giebt die Summe beider Producte die erste Behauptung. Multiplicirt man aber die zweite mit Cos. φ, die erste mit Sin. φ und subtrahirt letzteres Product von ersterem, so ergiebt sich die Richtigkeit der zweiten Behauptung.

§. 72. **Lehrsatz.** Wenn mehrere Kräfte, deren Richtungslinien sich alle in einem und denselben Punct p schneiden, in einer Ebene △ wirken, *(Fig. 12)* und

es sind die algebr. Summen der Producte aus den Kräften in die Sinusse und in die Cosinesse der Winkel, welche ihre Richtungslinien mit irgend einer in △ durch p gezogenen Linie l′ bilden, jede = o; so stehen die Kräfte untereinander im vollkommen Gleichgewicht, oder:

Behauptung. Es findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Voraussetzung.

1) A Sin. α + B Sin. β + ... = o.

2) A Cos. α + B Cos. β + ... = o.

Beweis. Es muß gezeigt werden können, daß die Kräfte bei den angegebenen Voraussetzungen dem Punct p nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zur Bewegung mittheilen, d. h. daß in Beziehung auf jeden Punct π in △, auch in unendlicher Ferne gedacht, die algebr. Summe der statischen Momente der Kräfte gleich o ist. Die eigentliche Behauptung ist also folgende:

Es ist in Beziehung auf jede Achse l, welchen △ normal schneidet, in welchem Punct π sie auch die Ebene △ durchschneiden mag,

$$'aA + 'bB + \ldots = o.$$

1stens. Denkt man sich in l′ irgendwo einen Punct π, und setzt πp = e; so folgt aus der ersten Voraussetzung

A e Sin. α + B e Sin. β + ... = o.

Er ist aber

$$e \text{ Sin. } \alpha = {}'a$$
$$e \text{ Sin. } \beta = {}'b$$

u. s. w. folglich

$${}'a A + {}'b B + \ldots . = o.$$

2tens. Aus den beiden Voraussetzungen folgt nach §. 71, daß auch für jede andere durch p in Δ gezogene Linie l'' welche mit l' irgend einen Winkel φ bildet,

$A \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) + B \text{ Sin. } (\beta + \varphi) + \ldots . = o$ ist.

Nimmt man nun in l'' irgendwo einen Punct π' an, und setzt $\pi' p = e$; so hat man also auch

$A e \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) + B e \text{ Sin. } (\beta + \varphi) + \ldots . = o.$

Es ist aber in Bezeihung auf die Achse, welche Δ in π' normal schneidet,

$$e \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) = {}'a$$
$$e \text{ Sin. } (\beta + \varphi) = {}'b$$

u. s. w. folglich auch

$${}'a A + {}'b B + \ldots . = o,$$

und hieraus erhellet, daß immer, wo auch eine Achse normal auf Δ gedacht wird,

$${}'a A + {}'b B + \ldots . = o \text{ ist.}$$

3tens. Die Kräfte A; B; C u. s. w. theilen also dem Punct p nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zu einer drehenden Bewegung mit. Jede drehende Bewegung, die der Punct p in Beziehung auf einen Drehpunct π aber annehmen könnte, ist im ersten Augenblick als ein Bestreben anzusehen, der Richtung der Tangente zu folgen. Da nun nach keiner einzigen solchen Richtung eine solche Thätigkeit

sich äußert, so wird auch kein Punct π' der Ebene einen Druck erleiden. Die Kräfte erhalten also untereinander ein vollkommenes Gleichgewicht.

§. 73. Lehrsatz. Sind mehrere Kräfte in einer Ebene Δ, und in einem Punct p untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, so sind auch in Beziehung auf jede durch p gehende Linie in Δ die Summen der Producte aus den Kräfte in die Sin. sowohl als in die Cosin. der Winkel, welche diese Linien mit den Richtungslinien der Kräfte bilden, jede = o, oder:

Behauptung.

1) $A \operatorname{Sin.} \alpha + B \operatorname{Sin.} \beta + \ldots . = 0.$

2) $A \operatorname{Cos.} \alpha + B \operatorname{Cos.} \beta + \ldots . = 0.$

Voraussetz. Es ist vollkommenes Gleichgewicht.

Beweis. 1stens. Wenn vollkommenes Gleichgewicht statt findet, so ist auch kein Bestreben da, um irgend eine Achse Drehung hervorzubringen. Es ist also für jede Achse l

$$'aA + 'bB + \ldots . = 0.$$

Nun ist aber auch

$$'a = ,a \operatorname{Sin.} \alpha.$$

$$'b = ,b \operatorname{Sin.} \beta.$$

$$'c = ,c \operatorname{Sin.} \gamma$$

u. s. w. und zugleich auch

$$,a = ,b = ,c \text{ u. s. w.} = \pi p;$$

folglich

$$\pi p\, A \operatorname{Sin.} \alpha + \pi p\, B \operatorname{Sin.} \beta + \ldots . = 0;$$

oder auch

$$A \operatorname{Sin.} \alpha + B \operatorname{Sin.} \beta + \ldots . = 0.$$

2tens.

2tens. Eben so läßt sich beweisen, daß auch
$$A \text{ Sin } (\alpha + \varphi) + B \text{ Sin. } (\beta + \varphi) + \ldots\ldots = 0$$
ist.

3tens. Löst man in der in 2) bewiesenen Gleichung die Clammern auf und ordnet sie, so entsteht
$$[A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots] \text{ Cos. } \varphi + [A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots] \text{ Sin. } \varphi = 0;$$
und weil nach dem ersten Theil des Beweises
$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0 \text{ ist,}$$
so ergiebt sich also
$$(A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots] \text{ Sin. } \varphi = 0;$$
oder
$$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots = 0.$$

§. 74. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte B; C u. s. w. in einer Ebene △ in einem Punct p angreifend, kein Gleichgewicht erzeugen, und man bezeichnet die entgegengesetzt mittlere derselben mit A; den Neigungswinkel ihrer durch p gehenden Richtungslinien mit einer angenommenen Linie l′ in △ durch p mit α; so ist
$$A = \pm\sqrt{[B \text{ Sin } \beta + C \text{ Sin } \gamma + \ldots]^2 + [B \text{ Cos } \beta + C \text{ Cos. } \gamma + \ldots]^2}$$
und
$$\text{tg. } \alpha = -\frac{B \text{ Sin. } \beta + C \text{ Sin. } \gamma + \ldots\ldots}{B \text{ Cos. } \beta + C \text{ Cos. } \gamma + \ldots\ldots}$$

Beweis. Es erhält A mit B, C u. s. w. vollkommnes Gleichgewicht, wenn

1stens $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0$ und

2tens $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots = 0$ ist.

Aus 1) entspringt

$$A^2 \text{Sin.} \alpha^2 = [B \text{Sin.} \beta + C \text{Sin.} \gamma + \ldots .]^2$$

aus 2) aber

$$A^2 \text{Cos.} \alpha^2 = [B \text{Cos.} \beta + C \text{Cos.} \gamma + \ldots .]^2$$

und die Summe beider giebt

$$A^2 (\text{Sin.} \alpha^2 + \text{Cos.} \alpha^2) \text{ oder}$$

$$A^2 = [B \text{Sin.} \beta + C \text{Sin.} \gamma + ..]^2 + [B \text{Cos.} \beta + C \text{Cos.} \gamma + ..]^2$$

also

$$A = \pm \sqrt{[B \text{Sin} \beta + C \text{Sin} \gamma + ..]^2 + [B \text{Cos} \beta + C \text{Cos} \gamma + ..]^2}$$

Entwickelt man, wie eben, aus 1) A Sin. α; aus 2) A Cos. α und dividirt dann, so entsteht

$$\frac{\text{Sin.} \alpha}{\text{Cos.} \alpha} \text{ oder}$$

$$\text{tg.} \alpha = \frac{B \text{Sin.} \beta + C \text{Sin.} \gamma + \ldots .}{B \text{Cos.} \beta + C \text{Cos.} \gamma + \ldots .}$$

§. 75. Zusatz. Sind nur zwei Kräfte B und C thätig, so ist ihre entgegengesetzt mittlere oder

$$A = - \sqrt{[B \text{Sin} \beta + C \text{Sin} \gamma]^2 + [B \text{Cos} \beta + C \text{Cos} \gamma]^2} \text{ (Fig. 13.)}$$

$$= - \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC (\text{Cos.} \beta \text{ Cos.} \gamma + \text{Sin.} \beta \text{ Sin.} \gamma)}$$

oder

$$A = - \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC \text{ Cos.} (\beta - \gamma)}.$$

Weil aber $\beta - \gamma$ = dem Winkel φ ist, welchen B' und C' bilden, so hat man also

$$A = - \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC \text{ Cos.} \varphi}$$

und die mittlere Kraft selbst

$$= + \sqrt{B^2 + C^2 + 2 BC \text{ Cos.} \varphi}.$$

Die Richtung von A bestimmt sich ferner durch

$$\text{tg.} \alpha = \frac{B \text{Sin.} \beta + C \text{Sin.} \gamma}{B \text{Cos.} \beta + C \text{Cos.} \gamma}$$

oder weil $\text{tg.} \alpha = \frac{\text{Sin.} \alpha}{\text{Cos.} \alpha}$ ist, durch

$$B\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\beta + C\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\gamma = B\,Sin.\,\beta\,Cos.\,\alpha + C\,Sin.\,\gamma\,Cos.\,\alpha$$

oder durch

$$C\,Sin.\,(\alpha - \gamma) = B\,Sin.\,(\beta - \alpha)$$

oder durch

$$C : B = Sin.\,\lambda : Sin.\,\varrho$$
$$= Sin.\,\lambda : Sin.\,(\varphi - \lambda).$$

Des dritten Abschnitts zweite Abtheilung.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts dreier Kräfte, insbesondere für den Fall, daß sich ihre in einer Ebene △ liegenden Richtungslinien alle in einem und denselben Punct p schneiden.

Bezeichnungen in dieser Abtheilung.

△ drücke die Ebene aus, in welcher die Richtungslinien der 3 Kräfte liegen.

p den Punct in △, in welchen alle drei angreifen.

A; B; C die Größe der Kräfte. *(Fig. 14.)*

A'; B'; C' ihre Richtungslinien.

a; b; c die drei Winkel, welche B' und C'; A' und C'; A' und B' miteinander in p bilden.

l' eine Linie in △ durch p.

α; β; γ die Winkel, welche A'; B'; C' mit l' in p bilden.

---

§. 76. Lehrsatz. Wenn 3 Kräfte, A; B; C in einer Ebene △ und einen Punct p angreifen, und es finden von folgenden 9 Gleichungen

$$\text{I.}\begin{cases} 1) & A : B = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b \\ 2) & A : C = \text{Sin. } a : \text{Sin. } c \\ 3) & B : C = \text{Sin. } b : \text{Sin. } c \end{cases}$$

oder $A : B : C = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b : \text{Sin. } c$

$$\text{II.}\begin{cases} 4) & A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b \\ 5) & B = - A \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a \\ 6) & C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a \end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases} 7) & A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \text{ Cos. } a \\ 8) & B^2 = A^2 + C^2 + 2AC \text{ Cos. } b \\ 9) & C^2 = B^2 + C^2 + 2AB \text{ Cos. } c \end{cases}$$

zwei statt, so sind diese 3 Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

Beweis. Die 3 Kräfte sind nach §. 72. im vollkommenen Gleichgewicht, wenn in Beziehung auf irgend eine Linie l′

$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + C \text{ Sin. } \gamma = 0$ und

$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + C \text{ Cos. } \gamma = 0$ ist.

Nimmt man nun l′ in A′; so ist

$$\alpha = 180^\circ$$
$$\beta = 180^\circ - c$$
$$\gamma = b + 180^\circ$$

folglich $\text{Sin. } \alpha = 0; \text{ Cos. } \alpha = -1;$

$\text{Sin. } \beta = \text{Sin. } c; \text{ Cos. } \beta = - \text{Cos. } c;$

$\text{Sin. } \gamma = - \text{Sin. } b; \text{ Cos. } \gamma = - \text{Cos. } b.$

Es verwandeln sich daher jene 2 Gleichungen in folgende zwei:

$$N. \begin{cases} B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b; \\ A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos } b. \end{cases}$$

Nimmt man l' in B'; so verwandeln sie sich in

$$M. \begin{cases} A \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } a \text{ und} \\ B = - A \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a; \end{cases}$$

und wenn man l' in C' annimmt, so erhalten sie die Gestalt

$$P. \begin{cases} A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a \\ C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a. \end{cases}$$

Es ist also nichts weiter nöthig, als zu zeigen, daß, wenn 2 der 9 Gleichungen des Lehrsatzes gegeben sind, daß daraus entweder die beiden N, oder die beiden M, oder die beiden P folgen. Der Beweis selbst wird also nun rein trigonometrisch und zerlegt sich, je nachdem man 2 der Voraussetzungen wählt, in 9 verschiedene Fälle.

I. Voraussetzung.

$$A : B : C = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b : \text{Sin. } c.$$

Beweis. Es ist $\text{Sin. } a = - \text{Sin. } (b + c)$

$$= - \text{Sin. } b \text{ Cos. } c - \text{Cos. } b \text{ Sin. } c;$$

also hat man

$$A : B = - \text{Sin. } b \text{ Cos. } c - \text{Cos. } b \text{ Sin. } c : \text{Sin. } b;$$

folglich

$$A \text{ Sin. } b = - B \text{ Sin. } b \text{ Cos. } c - B \text{ Sin. } c \text{ Cos. } b.$$

Aus der Voraussſ. $B : C = \text{Sin. } b : \text{Sin. } c$ folgt aber

$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$, und daher ist

$$A \text{ Sin. } b = - B \text{ Sin. } b \text{ Cos. } c - C \text{ Sin. } b \text{ Cos. } b,$$

oder $A = - B \text{ Cos. } c - C. \text{ Cos. } b,$

welches die eine zu beweisende Gleichung in N ist;

die 2te $B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$ folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

II. Voraussetzung.

1) $A : B = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b;$

2) $A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b.$

Beweis. Aus 1) folgt unmittelbar

$$A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a$$

welches die eine Behauptung in P ist; um die 2te in P, nemlich $C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a$ aus den Voraussetzungen zu folgern, so hat man

$$\text{Cos. } c = \text{Cos. } (a + b) \text{ also in 2)}$$

$$A = - C \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b + B \text{ Sin. } a \text{ Sin. } b - C \text{ Cos. } b.$$

Setzt man hierin $A \text{ Sin. } b$ für $B \text{ Sin. } a$ aus 1), so entsteht

$$A = - B \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b + A \text{ Sin. } b^2 - C \text{ Cos. } b;$$

oder

$$A \text{ Cos. } b^2 = - B \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b - C \text{ Cos. } b;$$

und hieraus

$$C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos } a.$$

III. Voraussetzung.

1) $A : B = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b;$

2) $C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a.$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar, wenn man l′ in C′ annimmt. Siehe P.

IV. Voraussetzung.

1) $A : B = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b;$

2) $A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a.$

Beweis. Nimmt man l′ in C′, so hat man die erste Behauptung in P sogleich aus 1). Zur Beweis-

führung der zweiten $C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a$ für dasselbe l′ hat man

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a \text{ und}$$

$$A^2 \text{ Sin. } b^2 = B^2 \text{ Sin. } a^2 \text{ also}$$

$$A^2 \text{ Cos. } b^2 = [B \text{ Cos. } a + C]^2;$$

und hieraus $C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a$.

V. Voraussetzung.

$$1) \quad A : B = \text{Sin. } a : \text{Sin. } b$$

$$2) \quad C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \text{ Cos. } c.$$

Beweis. Aus 1) folgt sogleich

$$A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a. \text{ s. P.}$$

Um $C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a$ aus den Voraussetzungen zu folgern, hat man

$$\text{Cos. } c = \text{Cos. } (a + b); \text{ also}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b - 2AB \text{ Sin. } a \text{ Sin. } b.$$

Subtrahirt man hievon

$$o = (A \text{ Sin. } b - B \text{ Sin. } a)^2; \text{ so entsteht}$$

$$C^2 = A^2 \text{ Cos. } b^2 + B^2 \text{ Cos. } a^2 + 2 AB \text{ Cos. } a \text{ Cos. } b,$$

oder $C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a$.

VI. Voraussetzung.

$$1) \quad A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b;$$

$$2) \quad B = - A \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a.$$

Beweis. Für l′ in B′ hat man die erste Behaupt. in M sogleich. Die zweite $A \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } a$ ergiebt sich folgendergestalt. Setzt man $\text{Cos. } (a + c)$ für Cos. b und zugleich den Werth für B aus 2) in 1); so entsteht

$$A = (A \text{ Cos. } c + C \text{ Cos. } a) \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } (a + c); \text{ oder}$$

$A \text{ Sin. } c^2 = C \text{ Cos. } a \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a$
$\text{Cos. } c + C \text{ Sin. } a \text{ Sin. } c$; oder
$$A \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } a.$$

VII. Voraussetzung.

1) $A = - B \text{ Cos. } c. - C \text{ Cos. } b$;

2) $A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a.$

Beweis. Für l′ in A′ hat man die erste Behauptung in N sogleich in der ersten Voraussetzung. Um die zweite
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$$
für dasselbe l′ aus den Voraussetzungen zu folgern, setze man Cos. (b + c) für Cos. a in 2); und den Werth für A aus 1) in 2); so entsteht
$$o = B^2 \text{ Sin. } c^2 + C^2 \text{ Sin. } b^2 - 2 B C \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c;$$
oder $o = B \text{ Sin. } c - C \text{ Sin. } b$; also
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b.$$

VIII. Voraussetzung.

1) $A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos } b$;

2) $B^2 = A^2 + C^2 + 2 A C \text{ Cos. } b.$

Beweis. Die erste Voraussetzung stimmt schon vollkommen mit der zweiten Behauptung in N; zur Begründung der ersten
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$$
setze man den Werth für A aus 1) in 2); so entsteht
$$B^2 = B^2 \text{ Cos. } c^2 + 2 B C \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c + C^2 \text{ Cos. } b^2 + C^2 - 2 B C \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c - 2 C^2 \text{ Cos. } b^2$$
oder $B^2 \text{ Sin. } c^2 = C^2 \text{ Sin. } b^2$ also
$$B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b.$$

IX. Voraussetzung.

1) $A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a$;

2) $B^2 = A^2 + C^2 + 2 A C \text{ Cos. } b$.

Beweis. Man addire beide Voraussetzungen, so entsteht

$$o = 2 C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a + 2 A C \text{ Cos. } b.$$

oder $C = - B \text{ Cos. } a - A \text{ Cos. } b$,

welches die zweite Behauptung in P ist. Zur Beweisführung der ersten

$$A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a$$

verfahre man nun ganz wie in VIII.

§. 77. Lehrsatz. Wenn 3 Kräfte, A; B; C; in einer Ebene so wirken, daß ihre Richtungslinien A′; B′; C′ in einem Punct p zusammenstoßen, und diese Kräfte sind untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, so finden auch die im Lehrsatz des vorigen §. angegebenen 9 Gleichungen sämmtlich statt.

Beweis. Stehen die Kräfte im vollkommenen Gleichgewicht, so ist nach §. 73 für jede in △ durch p gezogene Linie l′

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + C \text{ Sin. } \gamma = o \text{ und}$$

$$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + C \text{ Cos. } \gamma = o.$$

Hieraus entspringt, für l′ in A′:

1) $B \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } b$

2) $A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b$;

für l′ in B′:

3) $A \text{ Sin. } c = C \text{ Sin. } a$

4) $B = - A \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } a$;

und für l′ in C′:

$$5)\quad A \text{ Sin. } b = B \text{ Sin. } a$$

$$6)\quad C = - A \text{ Cos. } b - B \text{ Cos. } a.$$

Diese 6 aus der Voraussetzung gefolgerten Wahrheiten liefern einzeln unmittelbar die ersten 6 behaupteten Gleichungen. Zur Herleitung der 7ten hat man aus 1)

$$B \text{ Sin. } c - C \text{ Sin. } b = 0; \text{ also}$$

$$0 = B^2 \text{ Sin. } c^2 + C^2 \text{ Sin. } b^2 - 2 B C \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c;$$

und aus 2)

$$A^2 = B^2 \text{ Cos. } c^2 + C^2 \text{ Cos. } b^2 + 2 B C \text{ Cos. } b \text{ Cos. } c.$$

Die Summe beider giebt

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } (b + c); \text{ oder}$$

weil $\text{Cos. } (b + c) = \text{Cos. } a$ ist,

$$7.\ A^2 = B^2 + C^2 + 2 B C \text{ Cos. } a.$$

Eben so ergiebt sich die 8te aus 3) und 4); und die 9te aus 5) und 6).

§. 78. Zusatz. In Beziehung auf 2 oder mehrere Kräfte A; B u. s. w. lassen sich immer Linien aa'; bb' u. s. w. denken, welche unter sich dasselbe Verhältniß wie die Kräfte haben, d. h. so daß A : B : C : u. s. w. = aa' : bb' : cc' u. s. w. ist. Denkt man sich dann jede dieser Linien aus eben so viel Längeneinheiten bestehend, als die zugehörige Kraft Krafteinheiten zählt, so ist, als abstracte Zahl betreffend,

$$A = aa'$$

$$B = bb' \text{ u. s. w.}$$

In diesem Sinne sollen in der Folge Kräfte zuweilen durch Linien ausgedrückt werden.

§. 79. Lehrsatz. Wenn die Richtungslinien B'; C' zweier Kräfte B; C sich in einem Punct p schneiden, und den Winkel a bilden, und man macht

$$pg = B \quad (Fig. 15.)$$
$$ph = C;$$

zeichnet dann mit pg; ph und a das Parallelogram $phfg$, und läßt nach der Richtung fp eine Kraft

$$A = pf$$

wirken, so sind diese 3 Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

Beweis. Es verhält sich

$$hf : hp = \text{Sin. } fph : \text{Sin. } pfh.$$

Nun ist aber

$$hf = gp = B;$$
$$ph = C;$$
$$\text{Sin. } fph = \text{Sin. } b; \text{ und}$$
$$\text{Sin. } pfh = \text{Sin. } fpg = \text{Sin. } c; \text{ also}$$
$$\text{I. } B : C = \text{Sin. } b : \text{Sin. } c.$$

Ferner ist

$$pf^2 = hf^2 + ph^2 - 2. hf. ph \text{ Cos. } phf.$$

Weil nun aber

$pf = A$; $hf = gp = B$; $ph = C$ und

$\text{Cos. } phf = - \text{Cos. } a$ ist, so hat man also

$$\text{II. } A^2 = B^2 + C^2 + 2 BC \text{ Cos. } a;$$

und aus diesen 2 Gleichungen folgt nach §. 76. N^ro. V. daß die 3 Kräfte A; B; C; einander im Gleichgewicht erhalten.

§. 80. Lehrsatz. Wenn 3 Kräfte, A; B; C; in einer Ebene so wirken, daß ihre Richtungslinien sich in

einem und denselben Punct p schneiden, (*Fig.* 15.) und diese Kräfte stehen untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, so wird, wenn man $pg = B$; $ph = C$ macht, und mit pg, ph und a das Parallelogram pgfh beschreibt,

1stens $pf = A$ und

2tens fällt pf mit A' in eine Richtung.

Beweis. I. Weil die Kräfte im vollkommenen Gleichgewicht stehen, so ist nach §. 77

$$A = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b.$$

Der Construction gemäß ist aber auch

$$pf = pg \text{ Cos. } gpf + gf. \text{ Cos. } gfp;$$

oder weil $pg = B$; $\text{Cos. } gpf = - \text{Cos. } c$;

$$gf = ph = C; \text{ Cos. } gfp = \text{Cos. } fph$$

$$= - \text{Cos. } b \text{ ist};$$

$$pf = - B \text{ Cos. } c - C \text{ Cos. } b; \text{ folglich}$$

1stens $pf = A$.

II. Weil Gleichgewicht ist, so hat man ferner nach §. 77

$$B^2 = A^2 + C^2 + 2 A C \text{ Cos. } b; \text{ also}$$

$$\text{Cos. } b = \frac{B^2 - A^2 - C^2}{2 A C}$$

Es ist aber auch, zufolge der Construction,

$$fh^2 = pf^2 + ph^2 - 2. pf. ph \text{ Cos. } fph;$$

oder weil, der Voraussetzung zufolge,

$$fh = pg = B$$

$$ph = C$$

und nach dem ersten Theile des Beweises

$$pf = A \text{ ist},$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2\,A\,C\,\text{Cos. } fph;\ \text{alſo}$$

$$\text{Cos. } fph = -\ \frac{B^2 - A^2 - C^2}{2\,A\,C}$$

daher $\text{Cos. } b = -\text{ Cos. } fph;$

demnach b das Suplement zu fph, und folglich fällt

2tens fp in die Verlängerung von A′.

§. 81. Zuſatz. Das Parellelogram pgfh heißt das Parallelogram der Kräfte, und die, daſſelbe betreffende in den beiden letzten §. vorgetragenen Lehren, ſind von der höchſten Wichtigkeit und von ungemein vielfältigem Gebrauch. Da nun jede der 3 Kräfte A; B; C; die entgegengeſetzt mittlere der beiden andern iſt, und aus dem vorigen §. erhellet, daß von 3 Kräften, welche an einem Punct in einer Ebene nach verſchiedenen Richtungen wirkend, Gleichgewicht erhalten, jede kleiner ſein muß als die Summe der beiden andern; ſo laſſen ſich alſo auch immer 3 Kräfte, welche dieſe Eigenſchaft haben, in einem Punct unter ſolchen Winkeln anbringen, daß vollkommenes Gleichgewicht erfolgt.

§. 82. Lehrſatz. Wenn zwei Kräfte, B; C; in einem Punct p nach verſchiedenen Richtungen angreifen, und man zeichnet mit pg = B; ph = C und a das Parallelogram der Kräfte gpfh, ſo beſtimmt die Diagonale pf die Richtung pf (nicht fp) (*Fig.* 16.) und Größe der mittleren Kraft M zu B und C.

Beweis. Nach §. 80. iſt fp Richtung und Größe einer Kraft A, welche die entgegengeſetzt mittlere zu B und C iſt. Nun iſt aber A = pf, nach der Rich-

tung fp, mit einer Kraft M = pf nach der entgegengesetzten Richtung pf wirkend, im Gleichgewicht. (§. 27.) Folglich erfordert M = pf vollkommen dieselbe Gegenwirkung als B und C, leistet also auch vollkommen das, was B und C vereint zu leisten streben, d. h. es ist M = pf, nach der Richtung pf wirkend, die mittlere Kraft zu A und C.

§. 83. Zusatz. Wenn also eine Kraft M nach einer Richtung M′ wirkt, (*Fig.* 16) und man macht an einer beliebigen Stelle in M′, pf = M, zieht dann unter beliebigen Winkeln γ, β Linien aus p auf beiden Seiten von M′ und zeichnet das Parallelogram fgph, so ist es einerlei, ob M = pf nach der Richtung pf wirkt, oder ob man M außer Thätigkeit setzt, und dafür nach der Richtung pg eine Kraft B = pg und nach der Richtung ph eine Kraft C = ph wirken läßt. Die Größe von B und C durch M, γ, β ausgedrückt, ergeben sich leicht aus den Proportionen

$$pf : pg = \text{Sin. } pgf : \text{Sin. } pfg \text{ und}$$
$$pf : ph = \text{Sin. } phf : \text{Sin. } pfh;$$

oder

$$M : B = \text{Sin. } (\beta + \gamma) : \text{Sin. } \beta \text{ und}$$
$$M : C = \text{Sin. } (\beta + \gamma) : \text{Sin. } \gamma;$$

nemlich

$$B = \frac{M \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\beta + \gamma)};$$

$$C = \frac{M \text{ Sin. } \gamma}{\text{Sin. } (\beta + \gamma)}.$$

Ist $\beta + \gamma = 90°$; so hat man

$$B = M \text{ Sin. } \beta = M \text{ Cos. } \gamma;$$
$$C = M \text{ Sin. } \gamma = M \text{ Cos. } \beta \text{ und}$$
$$B^2 + C^2 = M^2.$$

§. 84. Lehrsatz. Wenn 3 Kräfte, A; B; C; an einem Punct p in einer Ebene nach verschiedenen Richtungen wirkend, einander im vollkommenen Gleichgewicht erhalten, (*Fig.* 15) und man macht auf B'; pg = B; auf C'; ph = C und auf der entgegengesetzten Verlängerung von A'; gf = A; so bilden die 4 Puncte, g, p, h und f ein Parallelogram.

Beweis. Bildeten sie kein Parallelogram, so müßten die Parallellinien aus g mit ph und aus h mit pg sich in irgend einem andern Punct als f schneiden; dieser Punct heiße x, so ist px nach §. 82 die mittlere Kraft zu B und C. Da nun aber A; B; C der Voraussetzung gemäß, vollkommenes Gleichgewicht erhalten, so ist A die entgegengesetzt mittlere Kraft zu B und C; und folglich muß nach §. 27, px in A' fallen, also x in der Richtung pf liegen. Wollte man nun annehmen, x fiele nicht in f, sondern über oder unter f, so wäre die mittlere Kraft zu B und C größer oder kleiner als die entgegengesetzt mittlere beider, dann fände aber kein Gleichgewicht statt, und dies ist gegen die Voraussetzung; also muß nothwendig x in f fallen.

§. 85. Zusatz. Wenn man statt zweier oder mehrere Kräfte ihre mittlere Kraft bestimmt, und diese sich wirkend denkt, so heißt dies das Zusammensetzen der Kräfte. Bringt man aber statt einer

Kraft ihre Seitenkräfte in Rechnung, so heißt dies das **Zerlegen einer Kraft.**

Des dritten Abschnitts dritte Abtheilung.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts, überhaupt für eine beliebige Anzahl von Kräften, deren Richtungslinien alle in einer festen Ebene liegen, und welche in ein festes System von Puncten wirken.

Bezeichnungen in dieser Abtheilung.

Δ drücke die feste Ebene aus, in welcher alle von Kräfte angegriffenen Puncte, und zugleich die Richtungslinien dieser Kräfte liegen. *(Fig. 11).*

ϖ einen Punct in Δ.

l eine Achse, welche Δ in ϖ normal schneidet.

A; B; C u. s. w. die Größe der Kräfte.

A'; B'; C' u. s. w. ihre Richtungslinien.

${}'a$; ${}'b$; ${}'c$ u. s. w. ihre Hebelsarme in Beziehung auf l.

l' eine durch ϖ in Δ gezogene Linie, welche A'; B'; C' u. s. w. in

a; b; c u. s. w. schneidet.

${}_{,}a$; ${}_{,}b$; ${}_{,}c$ u. s. w. die Abstände ϖa; ϖb; ϖc u. s. w.

α; β; γ u. s. w. die Neigungswinkel von A'; B'; C' u. s. w. gegen l'.

$a_{,}$; $b_{,}$; $c_{,}$ u. s. w. die Anfangsgeschwindigkeiten der Richtungslinien A'; B'; C' u. s. w. im Fall das ganze System eine Ortsänderung erlitte.

---

§. 86.

§. 86. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte, in einer Ebene △ an ganz verschiedenen Stellen und in ganz verschiedenen Richtungen wirkend, einander nicht im Gleichgewicht erhalten, so läßt sich immer eine einzige Kraft mit ihrer Richtung angeben, welche, wenn sie allein thätig wäre, dieselbe Wirkung hervorbringen würde, d. h. die mittlere Kraft ist allemal zu bestimmen; es ist also auch allemal möglich, durch Anbringung von noch einer Kraft (der entgegengesetzt mittleren) das Gleichgewicht herzustellen.

Beweis. Sind n Kräfte, A; B; C; . . . . N in der Ebene thätig, ohne Gleichgewicht hervorzubringen; so läßt sich zwischen zweieu derselben, etwa zwischen A und B, die mittlere (B) und ihre Richtung nach dem Bisherigen allemal bestimmen, mögen A′ und B′ sich schneiden oder parallel laufen. Denkt man sich nun (B) wirkend, und dafür A und B weggenommen, so hat man nur nach n — 1 Kräfte (B); C; . . . . N thätig, welche ganz dasselbe leisten, was A; B; C; . . . . N leisteten. Diese n — 1 Kräfte lassen sich dann eben so auf n — 2, diese auf n — 3 u. s. w. bis zuletzt auf eine, die mittlere aller ursprünglichen, zusammensetzen.

§. 87. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte, A; B; u. s. w. nach beliebigen Richtungen in einer Ebene △ wirken, und es finden in Beziehung auf irgend eine Linie l′ und irgend einen Punct π in ihr folgende 3 Gleichungen statt,

1) $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots = 0.$

2) $A \, Sin. \, \alpha + B \, Sin. \, \beta + \ldots . = 0.$

3) $,aA \, Sin. \, \alpha + ,bB \, Sin. \, \beta + \ldots . = 0;$

oder $'aA + 'bB + \ldots . = 0;$

so gelten eben so gebildete 3 Gleichungen für jede Linie in $\triangle$, welche A'; B' u. s. w. durchschneidet, und für jeden Punct in ihr.

Beweis. I. Da die ersten beiden Gleichungen nur von l' nicht von π in l' abhängig sind, so gelten sie für jeden Punct π' in l'; daß die 3te auch für π' gültig bleibt, folgt leicht ganz so wie in §. 49, wenn man 2) mit $\pi\pi'$ multiplicirt und das Product zu 3) addirt; denn dadurch entsteht

$[\pi\pi' + ,a] A \, Sin. \, \alpha + [\pi\pi' + ,b] \, B \, Sin. \, \beta + \ldots . = 0.$

II. Zieht man durch π eine Linie l'' *(Fig. 11)* in $\triangle$, welche mit l' irgend einen Winkel φ bildet, und versteht unter α'; β'; γ' u. s. w. $,A$; $,B$; u. s. w. dasjenige in Beziehung auf l'', was α; β u. s. w. $,a$; $,b$ u. s. w. in Beziehung auf l' bedeuten, so soll bewiesen werden, daß, zufolge der Voraussetzungen, auch

1) $A \, Cos. \, \alpha' + B \, Cos. \, \beta' + \ldots . = 0;$

2) $A \, Sin. \, \alpha' + B \, Sin. \, \beta' + \ldots . = 0;$

3) $,AA \, Sin. \, \alpha' + ,BB \, Sin. \, \beta + \ldots . = 0.$

ist.

Multiplicirt man zu dem Ende

$A \, Cos. \, \alpha + B \, Cos. \, \beta + \ldots . = 0$

mit $Cos. \, \varphi$; ferner

$A \, Sin. \, \alpha + B \, Sin. \, \beta + \ldots . = 0$

mit $Sin. \, \varphi$, und nimmt die Differenz, so entsteht

$$A \text{ Cos. } (\alpha + \varphi) + B \text{ Cos. } (\beta + \varphi) + \ldots\ldots = 0;$$

oder

$$A \text{ Cos. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta' + \ldots\ldots = 0.$$

Eben so ergiebt sich die 2te behauptete Gleichung, wenn man die erste Voraussetzung mit Sin. φ, die 2te mit Cos. φ multiplicirt, und beide Producte addirt. Weil nun ferner

$$,A \text{ Sin. } \alpha' = ,a \text{ Sin } \alpha = 'a;$$

$$,B \text{ Sin } \beta' = ,b \text{ Sin. } \beta = 'b$$

u. s. w. ist, so entsteht aus

$$,aA \text{ Sin } \alpha + ,bB \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0; \text{ oder}$$

$$'aA + 'bB + \ldots\ldots = 0; \text{ daß auch}$$

$$,AA \text{ Sin. } \alpha' + ,BB \text{ Sin. } \beta' + \ldots\ldots = 0 \text{ ist.}$$

III. Es gelten also 3 solche Gleichungen, wenn sie in Beziehung auf irgend eine Linie l' und irgend einen Punct π in l' gegeben sind,

1stens für jeden Punct π' in l'.

2tens für jede Linie l'' durch π in Beziehung auf π; folglich auch

3tens für jeden Punct in l'' (nach 1stens), d. h. für jede Linie und jeden Punct in $\triangle$.

IV. Da bei der Beweisführung der Allgemeingültigkeit der beiden Gleichungen

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0 \text{ und}$$

$$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots = 0,$$

die 3te

$$,aA \text{ Sin. } \alpha + ,bB \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0$$

gar nicht erforderlich war, so wird also auch in allen den Fällen, in welchen für eine Linie l' nur jene ersten

beiden Gleichungen gegegeben sind, ihre Allgemeingültigkeit doch statt finden, wenn auch

$$,aA\ \text{Sin.}\ \alpha + ,bB\ \text{Sin.}\ \beta + \ldots$$

nicht gleich Null wäre.

§. 88. Lehrsatz. Wenn Kräfte, A; B u. s. w. in beliebigen Richtungen in einer festen Ebene Δ an einem festen System von Puncten wirken, und es finden in Beziehung auf irgend einen Punct π in ihr, und eine durch π in Δ gezogene Linie l′ folgende 3 Gleichungen statt,

$$1)\ A\ \text{Sin.}\ \alpha + B\ \text{Sin.}\ \beta + \ldots = 0;$$

$$2)\ A\ \text{Cos.}\ \alpha + B\ \text{Cos.}\ \beta + \ldots = 0;$$

$$3)\ ,aA\ \text{Sin.}\ \alpha + ,bB\ \text{Sin.}\ \beta + \ldots = 0;$$

oder $'aA + 'bB + \ldots = 0;$

so sind diese Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

Beweis. Man denke sich die Kräfte (da es nach §. 28 gleichgültig ist, in welchen Punct ihrer Richtung eine Kraft angreift) in a, b; c u. s. w. angreifend, und zerlege jede nach §. 83 in 2 Seitenkräfte, von welchen die eine in die Richtung l′, die andere normal auf l′ wirkt, denke sich dann die ursprünglicheu Kräfte A; B; C u. s. w. weggenommen und dafür die erwähnten Seitenkräfte in Thätigkeit gesetzt, so bleibt nach §. 83 alles im vorigen Zustand. Es ergeben sich aber die Seitenkräfte nach der Richtung l′, nach §. 83,

$$= A\ \text{Cos}\ \alpha,\ B\ \text{Cos.}\ \beta \text{ u. s. w.}$$

und die normal auf l′,

$$= A\ \text{Sin.}\ \alpha;\ B\ \text{Sin.}\ \beta \text{ u. s. w.}$$

Weil nun aber, der ersten Voraussetzung gemäß,

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0 \text{ ist;}$$

so findet kein Bestreben zu fortgehender Bewegung nach der auf l′ normalen Richtung statt, und weil ferner

$$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots = 0 \text{ ist;}$$

so wird auch keine fortgehende Bewegung nach der Richtung l′ entstehen.

Daß keine drehende Bewegung um l entsteht, ersieht man aus

$$'aA + 'bB + \ldots = 0,$$

wenn man sich die ursprünglichen Kräfte selbst thätig denkt, nach §. 69, oder aus der, dasselbe ausdrückenden Gleichung,

$$,aA \text{ Sin. } \alpha + ,bB \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0,$$

nach §. 51; wenn man sich die aus der Zerlegung entstandenen parallelen Seitenkräfte A Sin. α; B Sin. β u. s. w. als auf Drehung um l an den Hebelsarmen ,a; ,b u. s. w. thätig denkt.

Da nun aber nach dem vorigen §. die 3 Bedingungsgleichungen, weil sie für ein π und l′ gegeben sind, auch für jede Linie in △ und jeden Punct in ihr gültig bleiben, so findet also nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zu fortgehender, und für keine einzige Achse l ein Bestreben zu drehender Bewegung um sie statt; die Kräfte sind also unter den angegebenen 3 Voraussetzungen im vollkommenen Gleichgewicht, wenn auch die Ebene, worin sie wirken, frei im Raum schwebt.

§. 89. Zusatz. Aus dem Beweis des vorigen §. und §. 87 ergeben sich folgende Wahrheiten:

I. Ist $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$ und zugleich $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots = 0$; so findet nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zu fortgehender Bewegung statt, wohl aber kann Drehung erfolgen, doch ohne Annäherung des Systems an irgend ein Ziel, also nur um den Mittelpunct desselben. (§. 55.)

II. Ist $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$ und zugleich $,a A \text{ Sin. } \alpha + ,b B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$; so findet um keine einzige Achse eine Drehung statt, wohl aber kann sie eine Einwirkung nach der Richtung l' erleiden, oder es kann Bestreben zu fortgehender Bewegung nach dieser Richtung, der Größe $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots$ gemäß, erfolgen.

III. Ist $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots = 0$ und zugleich $,a A \text{ Sin. } \alpha + ,b B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$; so findet nur um die Achse, auf welche sich $,a$; $,b$ u. s. w. beziehen, keine Drehung statt, wohl aber erleidet sie nach einer auf l' normalen Richtung einen Druck $= A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots$

IV. Ist blos $,a A \text{ Sin. } \alpha + ,b B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$; so findet zwar auch keine Drehung um l statt, allein l erleidet nach der Richtung l' einen Druck

$= A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots$ und normal darauf einen $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots$

V. Nur wenn alle 3 Gleichungen zugleich statt finden, ist vollkommenes Gleichgewicht.

§. 90. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte in einer festen Ebene sich im vollkommenen Gleichgewicht erhalten, so ist auch für jede Linie l' in $\triangle$ und jeden Punct π in ihr

1) $A\ \mathrm{Sin.}\ \alpha + B\ \mathrm{Sin.}\ \beta + \ldots = 0$;

2) $A\ \mathrm{Cos.}\ \alpha + B\ \mathrm{Cos.}\ \beta + \ldots = 0$;

3) $,a\,A\ \mathrm{Sin.}\ \alpha + ,b\,B\ \mathrm{Sin.}\ \beta + \ldots = 0$.

Beweis. Zerlegt man sich wie im vorigen §. jede der Kräfte in a; b u. s. w. in zwei Seitenkräfte, und denkt sich diese an die Stelle der ursprünglichen als thätig, so muß, weil der Voraussetzung nach, vollkommenes Gleichgewicht statt findet, sowohl

$A\ \mathrm{Sin.}\ \alpha + B\ \mathrm{Sin.}\ \beta + \ldots$ als auch

$A\ \mathrm{Cos.}\ \alpha + B\ \mathrm{Cos.}\ \beta + \ldots$

jede dieser Summen für sich $= 0$ sein, denn sonst würde nach der Richtung der Summe, welche nicht $= 0$ wäre, Bewegung erfolgen, welches der Voraussetzung entgegen ist.

Eben so muß auch

$,a\,A\ \mathrm{Sin.}\ \alpha + ,b\,B\ \mathrm{Sin.}\ \beta + \ldots$ oder

$'a\,A + 'b\,B + \ldots$

gleich Null sein, denn sonst erfolgte Drehung um l, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist.

Die Richtigkeit der 3 Gleichungen ist also für l' und π dargethan, und folglich gelten nach §. 87 auch für jede andere Linie und jeden Punct in ihr, 3 eben so gebildete Gleichungen.

§. 91. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte, B; C u. s. w. in $\triangle$ wirken, und man bezeichnet ihre mittlere

Kraft durch A; und drückt in Beziehung auf l' und π ihre Lage und Stelle durch ,a und α aus, so ist

$$A = \sqrt{[B\,Sin.\beta + C\,Sin.\gamma + ..]^2 + [B\,Cos.\beta + C\,Cos.\gamma + ..]^2}$$

$$,a = \frac{,b\,B\,Sin.\beta + ,c\,C\,Sin.\gamma + \ldots}{B\,Sin.\beta + C\,Sin.\gamma + \ldots}$$

$$tg.\alpha = \frac{B\,Sin.\beta + C\,Sin.\gamma + \ldots}{B\,Cos.\beta + C\,Cos.\gamma + \ldots}$$

Beweis. Wenn A die mittlere Kraft zu B; C u. s. w. ausdrückt, so wird — A die entgegengesetzt mittlere derselben, also diejenige sein, welche mit B; C u. s. w. vollkommenes Gleichgewicht erhält. Es ist also nach §. 89

1) $-A\,Sin.\alpha + B\,Sin.\beta + \ldots = 0;$

2) $-A\,Cos.\alpha + B\,Cos.\beta + \ldots = 0;$

3) $-,a\,A\,Sin.\alpha + ,b\,B\,Sin.\beta + \ldots = 0.$

Entwickelt man nun A Sin. α aus 1), A Cos. α aus 2), quadrirt beide Resultate, addirt dann, und zieht aus der Summe die Wurzel, so entsteht der angegebene Werth für A.

Dividirt man aber das erste Resultat durchs 2te, so entsteht der für tg. α behauptete Ausdruck, und setzt man A Sin. α aus 1) in 3); so ergiebt sich der Werth für ,a.

§. 92. Zusatz. Sind B; C u. s. w. in Beziehung auf eine feste Achse l im unvollkommenen Gleichgewicht, und man bezeichnet die Einwirkung, welche l erleidet, durch A; die Richtung derselben in Beziehung auf l' mit α; so ergiebt sich ganz wie §. 91.

$$A = \sqrt{[B\,Sin.\beta + C\,Sin.\gamma ..]^2 + [B\,Cos.\beta + C\,Cos.\gamma + ..]^2}$$

$$tg.\alpha = \frac{B\,Sin.\beta + C\,Sin.\gamma + \ldots}{B\,Cos.\beta + C\,Cos.\gamma + \ldots}$$

§. 93. Lehrsatz. Wenn Kräfte nach verschiedenen Richtungen in einer Ebne wirken, und es ist

1stens in Beziehung auf fortgehende Bewegung nach irgend einer Richtung die algebr. Summe der mechanischen Momente = 0; so findet nach dieser Richtung keine fortgehende Bewegung statt.

2tens in Beziehung auf drehende Bewegung um eine Achse l die algebr. Summe der mechanischen Momente = 0; so findet keine Drehung um l statt.

3tens in Beziehung auf fortgehende nach zweierlei, nicht parallelen Richtungslinien, und zugleich in Beziehung auf drehende Bewegung um irgend eine Achse, in allen diesen drei Fällen die algebr. Summe der mechanischen Momente gleich Null, so findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Beweis. I. In Beziehung auf fortgehende Bewegung.

Angenommen, der Punct a (*Fig.* 17) durchlaufe in irgend einem Zeitpunct den in △ liegenden Weg ak = v, also jeder Punct in △ zu demselben Ziel, denselben Weg v, so wird, wenn man aus k auf A′ die Normale kg fällt, ag = a, die Annäherung jedes Punctes in A′ an das Ziel von A ausdrücken. Zieht man nun l′ durch a normal auf v, so ist

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots$$

die Größe des Bestrebens zu fortgehender Bewegung nach der Richtung v, und es ist also die

Behauptung. $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta \ldots\ldots = 0.$
und die

Voraussetz. $A a_{,} + B b_{,} + \ldots\ldots = 0.$

Es ist $a_{,} = ag = v \text{ Cos. } (\alpha - 90)$
$= v \text{ Sin. } \alpha$

Eben so $_{,}b = v \text{ Sin. } \beta$ u. s. w.

Setzt man nun diese Werthe in die Voraussetzung, so entsteht

$$v A \text{ Sin. } \alpha + v B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0$$

oder

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0.$$

Nimmt man v in der Richtung l', so ergiebt sich aus der Voraussetzung eben so leicht, daß auch

$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots = 0$ ist,

welche Summe $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots\ldots$ das Bestreben zu fortgehender Bewegung nach der Richtung l' ausdrückt.

Beweis. II. Für drehende Bewegung um die Achse l. Hier ist

Behauptung. $'a A + 'b B + \ldots\ldots = 0;$
oder $_{,}a A \text{ Sin. } \alpha + _{,}b B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0.$

Voraussetzung. $A a_{,} + B b_{,} + \ldots\ldots = 0,$
wobei $a_{,}$; $b_{,}$; $c_{,}$ u. s. w. sich auf drehende Bewegung um l beziehen. Erfolgt durch irgend eine Veranlassung Drehung um π zum Winkel φ; so hat man wie §. 56,

$$a_{,} = {}'a \text{ Sin. } \varphi$$
$$b_{,} = {}'b \text{ Sin. } \varphi \text{ u. s. w.}$$

Aus der Voraussetzung folgt daher

$$\text{Sin. } \varphi \, [{}'aA + {}'bB + \ldots] = o;$$

oder $${}'aA + {}'bB + \ldots = o.$$

Beweis. III. Für vollkommenes Gleichgewicht. Hier ergiebt sich aus den 3 Voraussetzungen, daß

$$A \text{ Sin. } \alpha + \text{Bin. } \beta + \ldots = o;$$

$$A \text{ Cos. } \alpha + \text{Cos. } \beta + \ldots = o$$

und auch

$${}'aA + {}'bB + \ldots = o \text{ ist,}$$

und aus diesen 3 Gleichungen folgt nach § 88, daß vollkommenes Gleichgewicht statt finden muß.

§. 94. Lehrsatz. Wenn Kräfte nach verschiedenen Richtungen in einer Ebene wirken, und es findet ein vollkommenes Gleichgewicht unter ihnen statt, so ist sowohl in Hinsicht auf fortgehende als auf drehende Bewegung um jede Achse die algebraische Summe ihrer mechanischen Momente = o.

Beweis. Findet vollkommenes Gleichgewicht statt, so ist auch für jedes l'

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = o \text{ und}$$

$$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + \ldots = o;$$

also auch

$$A v \text{ Sin. } \alpha + B v \text{ Sin. } \beta + \ldots = o \text{ und}$$

$$A v \text{ Cos. } \alpha + B v \text{ Cos. } \beta + \ldots = o$$

oder nach §. 93, in Beziehung auf beide Richtungen,

$$Aa_{\prime} + Bb_{\prime} + \ldots = o.$$

Ferner ist, weil vollkommenes Gleichgewicht, der Voraussetzung gemäß, besteht, für jede Achse

$${}'aA + {}'bB + \ldots = o;$$

also auch

$$'a \text{ Sin. } \varphi A + 'b \text{ Sin. } \varphi B + \ldots\ldots = 0$$

oder $$A a, + B b, + \ldots\ldots = 0.$$

§. 95. Zusatz. Die Richtigkeit des Princips von den virtuellen Geschwindigkeiten ist durch die beiden letzten §. also auch vollständig für nicht durchaus parallel wirkende Kräfte in einer festen Ebene, dargethan.

Anwendungen der Lehren des dritten Abschnitts.

Aufgabe. I. In einer festen Ebene Δ, welche nur um eine auf sie normale Achse l drehbar ist, wirken

$$A = 5; B = 8; C = 10$$

nach Richtungen, welche in Beziehung auf eine durch den Punct π, wo Δ und l sich schneiden, in Δ gezogene Linie l' durch

$$,a = -4; \quad ,b = 2; \quad ,c = 3 \text{ und}$$

$$\alpha = 90°; \quad \beta = 30°; \quad \gamma = 60°$$

bestimmt sind; man soll durch eine Kraft $D = 6$, deren Richtungslinie mit l' den Winkel $\delta = 45°$ bildet, unvollkommenes Gleichgewicht herstellen, also das erforderliche $,d$ aufsuchen.

Auflösung. Die Bedingungsgleichung ist

$$A'a + B'b + C'c + D'd = 0$$

oder

$$-20 + 16 \text{ Sin. } 30 + 30 \text{ Sin. } 60 + 6. ,d \text{ Sin. } 45 = 0;$$

und hieraus folgt

$$'d = ,d \text{ Sin. } 45 = -\tfrac{7}{3} \text{ beinahe;}$$

also $$,d = 3,3 \ldots$$

Aufgabe. II. Welchen Druck E hat in der vorigen Aufgabe π auszuhalten, und nach welcher Richtung?

Auflösung. Normal auf l' ist die Einwirkung
$= 5 \text{ Sin. } 90 + 8 \text{ Sin. } 30 + 10 \text{ Sin. } 60 + 6 \text{ Sin. } 45. = 21,9 \ldots$
und nach der Richtung 'l ist sie
$= 5 \text{ Cos. } 90 + 8 \text{ Cos. } 30 + 10 \text{ Cos. } 60 + 6 \text{ Cos. } 45 = 16,17 \ldots$
folglich ist

$$E = \sqrt{21,9^2 + 16,17^2} = 27,22 \ldots$$

und nennt man den Richtungswinkel, welchen E' mit l' bildet, ε; so hat man

$$\text{tg. } \varepsilon = \frac{16,17}{21,9}; \text{ folglich}$$

$$\varepsilon = 36^\circ\, 26'$$

Vollkommenes Gleichgewicht findet also statt für
$A = 5;\ B = 8;\ C = 10;\ D = 6;\ E = -27,22$
$,a = -4;\ ,b = 2;\ ,c = 3;\ ,d = 3,3;\ ,e = 0;$
$\alpha = 90;\ \beta = 30^\circ;\ \gamma = 60^\circ;\ \delta = 45^\circ;\ \varepsilon = 36^\circ\, 26'$

Reducirt man eine der 4 Kräfte A; B; C oder D auf eine andere Stelle, so erleidet auch π einen andern Druck, d. h. es ändert sich E, ,e und ε.

Aufgabe. III. Drei Kräfte, A; B; C von welchen die Summe je zweier größer als die 3te ist, in einem Punct p nach solchen Richtungen anzubringen, daß sie sich im Gleichgewicht erhalten.

Auflösung. 1stens durch Zeichnung.

Man nehme 3 Linien, welche sich wie A, B und C verhalten, zeichne mit ihnen ein Dreieck, so, daß p ein Eckpunct desselben wird, und ergänze dasselbe

zum Parallelogram, so ergeben sich die verlangten Richtungen.

2^{tens} durch Rechnung.

Aus $A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \, Cos. \, a$ ergiebt sich a

und dann aus $A : B = Sin. \, a : Sin. \, b$ auch b

Beispiel. Ist $A = 4$; $B = 5$; $C = 7$; so findet man

$$a = 145^\circ 25'$$
$$b = 135^\circ 35'$$
$$c = 78^\circ 28'.$$

Aufgabe. IV. Es sei $B = 10$; $C = 12$; $D = -8$;
$\beta = 30^\circ$; $\gamma = 120^\circ$; $\delta = 90^\circ$;
$,b = 4$; $,c = 10$; $,d = 12$.
Man soll A; α; $,a$ fürs vollkommene Gleichgewicht bestimmen.

Auflösung. Nach §. 91 erhält man

$$A = -7,856;$$

$$tg. \, \alpha = \frac{24 + 7\sqrt{3}}{13}; \; \alpha = 70^\circ 12' 28'';$$

$$,a = 4. \; \frac{71 - 23\sqrt{3}}{33} = 3,777 \ldots$$

Aufgabe. V. In einer festen Ebene sei eine feste Linie $cg = a$; *(Fig. 18)* in dem, durch die Winkel α und β bestimmten d, wirke eine Kraft $= A$ nach der Richtung, welche γ bestimmt. Ihr Bestreben soll durch die Kräfte x; y; z; von welchen erstere beide normal auf a wirken, letztere nach der Richtung cg thätig ist, aufgehoben werden, so, daß ein vollkommenes

Gleichgewicht entsteht. Wie groß müssen x, y und z sein?

Auflösung. I. Man nehme a als l' und c als π, so entstehen die 3 Gleichungen

$$1)\quad y\,\mathrm{Sin.}\,90 - x\,\mathrm{Sin.}\,90 + A\,\mathrm{Sin.}\,(180-\gamma) = 0$$

$$2)\quad z + A\,\mathrm{Cos.}\,(180-\gamma) = 0$$

$$3)\quad - x.\,a + A\,\mathrm{Sin.}\,(180-\gamma)\,cf = 0$$

oder, weil

$$a : cd = \mathrm{Sin.}\,(\alpha+\beta) : \mathrm{Sin.}\,\beta$$

$$cd : cf = \mathrm{Sin.}\,\gamma : \mathrm{Sin.}\,(\alpha+\gamma);\ \text{also}$$

$$a : cf = \mathrm{Sin.}\,\gamma\,\mathrm{Sin.}\,(\alpha+\beta) : \mathrm{Sin.}\,\beta\,\mathrm{Sin.}\,(\alpha+\gamma)\ \text{ist,}$$

$$1)\quad y - x + A\,\mathrm{Sin.}\,\gamma = 0.$$

$$2)\quad z - A\,\mathrm{Cos.}\,\gamma = 0.$$

$$3)\quad - ax + A\,\frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\beta\,\mathrm{Sin.}\,(\alpha+\gamma)}{\mathrm{Sin.}\,(\alpha+\beta)} = 0;$$

und hieraus ist

$$x = \frac{\mathrm{Sin.}\,\beta\,\mathrm{Sin.}\,(\alpha+\gamma)}{\mathrm{Sin.}\,(\alpha+\beta)}.\,A$$

$$z = A\,\mathrm{Cos.}\,\gamma$$

$$y = \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha\,\mathrm{Sin.}\,(\beta-\gamma)}{\mathrm{Sin.}\,(\alpha+\beta)}\,A.$$

Auflösung. II. Nimmt man, um die Aufgabe mit Hülfe des Prinzips von den virtuellen Geschwindigkeiten aufzulösen 1stens an, die Ebene bewege sich nach der Richtung fd um ein Stück = v; so ist

$$a_{\prime} = v$$

$$x_{\prime} = - v\,\mathrm{Sin.}\,\gamma$$

$$y_{\prime} = v\,\mathrm{Sin.}\,\gamma$$

$$z_{\prime} = - v\,\mathrm{Cos.}\,\gamma;\ \text{also}$$

$$1)\quad Av - x\,v\,\mathrm{Sin.}\,\gamma + y\,v\,\mathrm{Sin.}\,\gamma - z\,v\,\mathrm{Cos.}\,\gamma = 0.$$

Nimmt man 2^{tens} an, sie bewege sich nach der Richtung fc; so ist

$$a_{,} = v \text{ Cos. } \gamma$$

$$x_{,} = o$$

$$y_{,} = o$$

$$z_{,} = - v; \text{ also}$$

$$2) \quad A v \text{ Cos. } \gamma - v z = o.$$

Nimmt man 3^{tens} an, es entstünde eine dem Winkel φ zugehörige Drehung um c; so ist

$$a_{,} = cf \text{ Sin. } \gamma. \text{ Sin. } \varphi$$

$$x_{,} = - a \text{ Sin. } \varphi$$

$$y_{,} = o$$

$$z_{,} = o; \text{ also}$$

$$3) \quad A. \, cf \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varphi - x \, a \text{ Sin. } \varphi = o.$$

Aus 2) folgt

$$z = A \text{ Cos. } \gamma$$

aus 3)

$$x = \frac{\text{Sin. } \beta \text{ Sin. } (\alpha + \gamma)}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)} A$$

und nun aus 1)

$$y = \frac{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\beta - \gamma)}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)} A.$$

Auflösung. III. Die Resultate lassen sich auch blos durch Anwendung des Parallelograms der Kräfte finden.

Man zerlege A in d nach den Richtungen gd und dc in zwei Seitenkräfte, dm und dn, betrachte dm als in g angreifend, und zerlege dm in g, in die Seitenkräfte gv, normal auf a und gw in die Richtung a. Eben so betrachte man dn als in c wirkend,

und

und zerlege dn in c in die Seitenkräfte cp normal auf a und cq nach der Richtung a. Da nun vollkommenes Gleichgewicht entstehen soll, so muß

1stens $x = gv$

2tens $y = cp$

3tens $z = gw + cq$ sein.

Es verhält sich aber

$$A : dm = \text{Sin.}\ (\alpha + \beta) : \text{Sin.}\ (\alpha + \gamma) \text{ und}$$

$$A : dn = \text{Sin.}\ (\alpha + \beta) : \text{Sin.}\ (\beta - \gamma);$$

folglich ist

$$dm = \frac{\text{Sin.}\ (\alpha + \gamma)}{\text{Sin.}\ (\alpha + \beta)}\ A$$

$$dn = \frac{\text{Sin.}\ (\beta - \gamma)}{\text{Sin.}\ (\alpha + \beta)}\ A.$$

Ferner

$$gv = dm\ \text{Sin.}\ \beta$$

$$gw = dm\ \text{Cos.}\ \beta$$

$$cp = dn\ \text{Sin.}\ \alpha$$

$$cq = dn\ \text{Cos.}\ \alpha$$

also

$$X = \frac{\text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ (\alpha + \gamma)}{\text{Sin.}\ (\alpha + \beta)}\ A$$

$$Y = \frac{\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ (\beta - \gamma)}{\text{Sin.}\ (a + \beta)}\ A$$

$$Z = \left[\frac{\text{Sin.}\ (\alpha + \gamma)\ \text{Cos}\ \beta}{\text{Sin.}\ (\alpha + \beta)} + \frac{\text{Sin.}\ (\beta - \gamma)\ \text{Cos.}\ \alpha}{\text{Sin.}\ (\alpha + \beta)}\right] A$$

$$= \frac{\text{Cos.}\ \gamma\ \text{Sin.}\ (\alpha + \beta)}{\text{Sin.}\ (\alpha + \beta)}\ A$$

$$= A\ \text{Cos.}\ \gamma$$

Aufgabe. VI. Eine feste Linie ab (*Fig.* 19) wird in allen ihren Puncten nach parallelen Richtungen

unter dem Neigungswinkel α, von gleichgroßen Kräften, deren Summe = A ist, angegriffen. Es soll durch die 3 Kräfte x; y; z, ein vollkommenes Gleichgewicht hergestellt werden. Die Größe dieser 3 Kräfte, welche nach den in der Figur angezeigten Richtungen angebracht werden sollen, zu bestimmen.

Auflösung. Halbirt man ab in c, und läßt in c unter dem Winkel α die ganze Summe A wirken, so ist der Erfolg nach §. 39 derselbe, und es ergeben sich nun, wenn man ab als l', und a als π nimmt, die 3 Gleichungen

1) $-z \operatorname{Sin.}(180-\alpha) + y \operatorname{Sin.}(90-\alpha) + A \operatorname{Sin.}(180-\alpha) - x \operatorname{Sin} 90 = 0$

2) $-z \operatorname{Cos}(180-\alpha) + y \operatorname{Cos}(90-\alpha) + A \operatorname{Cos}(180-\alpha) - x \operatorname{Cos} 90 = 0$

3) $A \operatorname{Sin.}(180-\alpha).\ ac - x \operatorname{Sin.} 90.\ ab = 0;$

oder

1) $-z \operatorname{Sin.} \alpha + y \operatorname{Cos.} \alpha + A \operatorname{Sin.} \alpha - x = 0$

1) $z \operatorname{Cos.} \alpha + y \operatorname{Sin.} \alpha - A \operatorname{Cos.} \alpha = 0$

3) $A \operatorname{Sin.} \alpha - 2x = 0;$

und hieraus $x = \frac{1}{2} A \operatorname{Sin.} \alpha$

$$y = \frac{A}{2(\operatorname{tg.}\alpha + \operatorname{Cotg.}\alpha)} = \frac{1}{2} A \operatorname{Sin.}\alpha \operatorname{Cos.}\alpha = \frac{1}{4} A \operatorname{Sin.} 2\alpha$$

$$z = \frac{2 - \operatorname{Sin.}\alpha^2}{2} A$$

Soll x durch 2 Kräfte, v und w nach den in der Figur angezeigten Richtungen ersetzt werden, so ist

$$v = x \operatorname{Sin.} \alpha = \frac{1}{2} A \operatorname{Sin.} \alpha^2$$

$$w = x \operatorname{Cos.} \alpha = \frac{1}{4} A \operatorname{Sin} 2\alpha.$$

Anmerk. Diese Aufgabe kann man ebenfalls, wie die vorige, 1stens durch das Prinzip von den virtuellen Geschwindigkeiten; 2tens durch Anwendung des Parallelograms der Kräfte auflösen.

Aufgabe. VII. Es sei a b c eine gebrochene feste Linie; in ihrer Ebene wirken, nach den in der Figur angezeigten Richtungen, die Kräfte A; x; y; z; *(Fig. 20)* man soll die x; y; z so bestimmen, daß ein vollkommenes Gleichgewicht entsteht.

Auflösung. Nimmt man ab als 1, und a als α; so ergeben sich die 3 Gleichungen:

1) $- z \,\text{Sin.}\, \alpha + y \,\text{Cos.}\, \alpha + x \,\text{Sin.}\, \alpha - A \,\text{Cos.}\, \alpha = 0$

2) $z \,\text{Cos.}\, \alpha + y \,\text{Sin.}\, \alpha - x \,\text{Cos.}\, \alpha - A \,\text{Sin.}\, \alpha = 0$

3) $ab\, x \,\text{Sin.}\, \alpha - ad\, A \,\text{Cos.}\, \alpha = 0.$

Aus 1) entsteht

$$- z + y \,\text{Cotg.}\, \alpha + x - A \,\text{Cotg.}\, \alpha = 0;$$

aus 2)

$$z + y \,\text{tg.}\, \alpha - x - A \,\text{tg.}\, \alpha = 0;$$

und die Summe giebt

$$y = A;$$

folglich ist

$$z = x.$$

Setzt man nun cf = h; ab = e; so ist

$$ad\, \text{Cos.}\, \alpha = h:$$

folglich entsteht aus 3)

$$x = z = \frac{A h}{e \,\text{Sin.}\, \alpha}.$$

Aufgabe. VIII. Wird in der vorigen Aufgabe vorausgesetzt, daß jeder Punct der ganzen Linie cf nach parallelen Richtungen von einer gleichgroßen Kraft, deren Summe = B, *(Fig. 20)* und jeder Punct der Linie ab nach derselben Richtung von einer eben so großen Kraft, deren Summe = C ist, angegriffen wird, und daß alle diese Kräfte nach der Rich-

tung cf wirken, wie groß müssen denn x; y und z sein?

Auflösung. Der Annahme zufolge, ist

$$B : C = h : e;$$

und nimmt man nun C in der Mitte von ab als vereint an, so entstehen die Gleichungen

1) $-z\,\text{Sin.}\,\alpha + y\,\text{Cos.}\,\alpha + C\,\text{Sin.}\,\alpha + x\,\text{Sin.}\,\alpha + B\,\text{Sin.}\,\alpha - A\,\text{Cos.}\,\alpha = 0$

2) $z\,\text{Cos.}\,\alpha + y\,\text{Sin.}\,\alpha - C\,\text{Cos.}\,\alpha - x\,\text{Cos.}\,\alpha - B\,\text{Cos.}\,\alpha - A\,\text{Sin.}\,\alpha = 0$

3) $\frac{1}{2}\,e\,C\,\text{Sin.}\,\alpha + e\,x\,\text{Sin.}\,\alpha + e\,B\,\text{Sin.}\,\alpha - A\,h = 0;$

und hieraus, wie in der vorigen Auflösung;

$$y = A;$$

$$x = \frac{A\,B}{C\,\text{Sin.}\,\alpha} - B - \frac{1}{2}\,C;$$

$$z = \frac{1}{2}C + \frac{A\,B}{C\,\text{Sin.}\,\alpha};$$

Soll nun etwa $x = 0$ sein, so muß

$$A = \frac{2\,B + C}{2\,B}\,C\,\text{Sin.}\,\alpha \text{ sein.}$$

Aufgabe. IX. Die Linie ab (*Fig.* 21) wird in allen ihren Puncten von gleichgroßen Kräften, deren Summe = A ist, nach parallelen Richtungen unter dem Neigungswinkel α angegriffen. Man soll durch die 3 Kräfte, x, y, z, deren Richtungen in der Figur ausgedrückt sind, ein vollkommenes Gleichgewicht herstellen.

Auflösung. Erfolgte eine fortgehende Bewegung = v nach der Richtung von z, so ist

$$z_{,} = v$$
$$y_{,} = 0$$
$$a_{,} = -v$$
$$x_{,} = 0; \text{ also hat man}$$

1) $z.v - Av = o$; folglich

$$z = A.$$

Erfolgte 2tens eine fortgehende Bewegung nach der Richtung von x; so ist

$$x_{\prime} = v$$
$$a_{\prime} = o$$
$$z_{\prime} = o$$
$$y_{\prime} = -v; \text{ also}$$

2) $xv - yv = o$; folglich

$$x = y.$$

Erfolgte 3tens eine dem Winkel φ zugehörige Drehung um a; so wäre

$$z_{\prime} = o$$
$$y_{\prime} = o$$
$$a_{\prime} = {}'a \text{ Sin. } \varphi = ac \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varphi$$
$$x_{\prime} = -{}'x \text{ Sin. } \varphi = -ab \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \varphi;$$

also hat man

3) $A.\ ac \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varphi - x\, ab \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \varphi = o$;

folglich, weil

$$ac = \tfrac{1}{2} ab \text{ ist,}$$
$$x = \tfrac{1}{2} A \text{ tg. } \alpha;$$

daher auch nach 2)

$$y = \tfrac{1}{2} A \text{ tg. } \alpha.$$

Aufgabe. X. Wenn in der vorigen Aufgabe die Kräfte z und y weggenommen werden, und dafür eine feste Linie ad an a angesetzt wird, *(Fig. 21)* welche ebenfalls in allen ihren Puncten von gleichgroßen Kräften, welche mit denen, welche in ab wirken, parallel thätig sind, angegriffen wird, deren Summe

= B ist; wie groß müssen dann die in der Figur angezeigten Größen v, w und β sein, wenn das vollkommene Gleichgewicht noch bestehen soll?

Auflösung. In Fig. 22 sind die Wirkungen auf ad angedeutet, und man erhält

$$1)\quad v = A + B$$

$$2)\quad w = \tfrac{1}{2} A \text{ tg. } \alpha$$

$$3)\ B.\tfrac{1}{2} ad \text{ Sin. } \beta + A.ad \text{ Sin. } \beta = \tfrac{1}{2} A \text{ tg. } \alpha.\ ad \text{ Cos. } \beta;$$

also $\quad \text{tg. } \beta = \frac{A \text{ tg. } \alpha}{2A + B};$

folglich $\quad \text{tg } \alpha : \text{tg. } \beta = 2A + B : A;$

oder $\quad \text{Cotg. } \alpha : \text{Cotg. } \beta = A : 2A + B.$

Aufgabe. XI. Nimmt man in der vorigen Aufgabe v und w fort, und setzt dafür eine 3te Linie df an d, in Beziehung, auf welche γ; C; v′; w′ dasjenige bedeuten sollen, was β; B; v; w in Beziehung auf ad ausdrücken, wie groß müssen dann γ; v′; w′ sein, damit das vollkommene Gleichgewicht fortdaurend bestehe?

Auflösung. Man erhält

$$v' = A + B + C$$

$$w' = \tfrac{1}{2} A \text{ tg. } \alpha$$

$$\text{tg. } \gamma = \frac{A \text{ tg. } \alpha}{2(A + B) + C}; \text{ daher}$$

$$\text{Cotg. } \alpha : \text{Cotg. } \gamma = A : 2(A + B) + C.$$

Zusatz. Nimmt man noch eine 4te Linie; so entsteht

$$\text{Cotg. } \alpha : \text{Cotg. } \delta = A : 2(A + B + C) + D$$

u. s. w.

Man hat also für eine solche Verbindung

$$\text{Cotg.}\,\alpha : \text{Cotg.}\,\beta : \text{Cotg.}\,\gamma : \text{Cotg.}\,\delta : \text{etc.} =$$
$$A : 2A + B : 2(A + B) + C : 2(A + B + C) + D : \text{etc.}$$

und wenn $A = B = C = D = \text{etc.}$ ist,

$$\text{Cotg.}\,\alpha : \text{Cotg.}\,\beta : \text{Cotg.}\,\gamma : \text{Cotg.}\,\delta : = 1 : 3 : 5 : 7 \text{ etc.}$$

wonach sich leicht eine solche Stellung construiren läßt.

Aufgabe. XII. Die beiden festen Linien $cd = a$ und $df = b$ *(Fig. 23)* bilden ein unter sich unverschiebbares System von Puncten; cd wird in allen seinen Puncten von gleichgroßen parallel wirkenden Kräften, deren Summe $= A$ ist, und df ebenfalls nach parallelen Richtungslinien mit jenen von gleichgroßen Kräften, deren Summe $= B$ ist, in allen seinen Puncten angegriffen. Es soll vollkommenes Gleichgewicht mit A und B durch die zu bestimmenden Kräfte x, y, z, w nach den in der Figur angezeigten Richtungslinien hervorgebracht werden.

Auflösung. Nimmt man eine fortgehende Bewegung nach der Richtung cf an, so ergiebt sich

$$1)\quad x - y = 0.$$

Aus der Annahme, es entstünde eine andere, normal auf jene, folgt

$$2)\quad z + w = A + B.$$

Macht man die Momente in Beziehung auf drehende Bewegung um c, so entsteht

$$3)\quad A.\,\tfrac{1}{2}\,a\,\text{Sin.}\,\alpha + B\,(a\,\text{Sin.}\,\alpha + \tfrac{1}{2}\,b\,\text{Sin.}\,\beta) = w.\,(a\,\text{Sin.}\,\alpha + b\,\text{Sin.}\,b);$$

und hieraus ist

$$w = \frac{aA\,\text{Sin.}\,\alpha + 2\,aB\,\text{Sin.}\,\alpha + bB\,\text{Sin.}\,\beta}{2\,(a\,\text{Sin.}\,\alpha + b\,\text{Sin.}\,\beta)};$$

= B ist; wie groß müssen dann die in der Figur angezeigten Größen v, w und β sein, wenn das vollkommene Gleichgewicht noch bestehen soll?

Auflösung. In Fig. 22 sind die Wirkungen auf ad angedeutet, und man erhält

$$1)\quad v = A + B$$

$$2)\quad w = \tfrac{1}{2} A\, tg.\, \alpha$$

$$3)\ B.\tfrac{1}{2} ad\, Sin.\, \beta + A.\, ad\, Sin.\, \beta = \tfrac{1}{2} A\, tg.\, \alpha.\ ad\, Cos.\, \beta;$$

also $\quad tg.\, \beta = \dfrac{A\ tg.\ \alpha}{2\,A + B};$

folglich $\quad tg\, \alpha : tg.\, \beta = 2\,A + B : A;$

oder $\quad Cotg.\, \alpha : Cotg.\, \beta = A : 2\,A + B.$

Aufgabe. XI. Nimmt man in der vorigen Aufgabe v und w fort, und setzt dafür eine 3te Linie df an d, in Beziehung, auf welche γ; C; v'; w' dasjenige bedeuten sollen, was β; B; v; w in Beziehung auf ad ausdrücken, wie groß müssen dann γ; v'; w' sein, damit das vollkommene Gleichgewicht fortdaurend bestehe?

Auflösung. Man erhält

$$v' = A + B + C$$

$$w' = \tfrac{1}{2} A\, tg.\, \alpha$$

$$tg.\, \gamma = \frac{A\ tg.\ \alpha}{2\,(A + B) + C};\ \text{daher}$$

$$Cotg.\, \alpha : Cotg.\, \gamma = A : 2\,(A + B) + C.$$

Zusatz. Nimmt man noch eine 4te Linie; so entsteht

$$Cotg.\, \alpha : Cotg.\, \delta = A : 2\,(A + B + C) + D$$

u. s. w.

Man hat also für eine solche Verbindung

$\text{Cotg.}\,\alpha : \text{Cotg.}\,\beta : \text{Cotg.}\,\gamma : \text{Cotg.}\,\delta : \text{etc.} =$
$A : 2A + B : 2(A + B) + C : 2(A + B + C) + D : \text{etc.}$
und wenn $A = B = C = D = \text{etc.}$ ist,
$\text{Cotg.}\,\alpha : \text{Cotg.}\,\beta : \text{Cotg.}\,\gamma : \text{Cotg.}\,\delta : = 1 : 3 : 5 : 7 \text{ etc.}$
wonach sich leicht eine solche Stellung construiren läßt.

Aufgabe. XII. Die beiden festen Linien $cd = a$ und $df = b$ (*Fig.* 23) bilden ein unter sich unverschiebbares System von Puncten; cd wird in allen seinen Puncten von gleichgroßen parallel wirkenden Kräften, deren Summe $= A$ ist, und df ebenfalls nach parallelen Richtungslinien mit jenen von gleichgroßen Kräften, deren Summe $= B$ ist, in allen seinen Puncten angegriffen. Es soll vollkommenes Gleichgewicht mit A und B durch die zu bestimmenden Kräfte x, y, z, w nach den in der Figur angezeigten Richtungslinien hervorgebracht werden.

Auflösung. Nimmt man eine fortgehende Bewegung nach der Richtung cf an, so ergiebt sich

$$1)\quad x - y = 0.$$

Aus der Annahme, es entstünde eine andere, normal auf jene, folgt

$$2)\quad z + w = A + B.$$

Macht man die Momente in Beziehung auf drehende Bewegung um c, so entsteht

$$3)\quad A.\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\,\alpha + B\,(a\,\text{Sin.}\,\alpha + \tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\,\beta) = w.\,(a\,\text{Sin.}\,\alpha + b\,\text{Sin.}\,b);$$

und hieraus ist

$$w = \frac{aA\,\text{Sin.}\,\alpha + 2aB\,\text{Sin.}\,\alpha + bB\,\text{Sin.}\,\beta}{2\,(a\,\text{Sin.}\,\alpha + b\,\text{Sin.}\,\beta)};$$

oder, weil $a \text{ Cos. } \alpha = b \text{ Cos. } \beta$ ist,

$$w = \frac{(A+B) \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \beta + B \text{ Sin. } (\alpha + \beta)}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)};$$

oder auch

$$w = \frac{(A+B) \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)} + \tfrac{1}{2} B;$$

und nun aus 2)

$$z = \frac{(A+B) \text{ Sin. } \beta \text{ Cos. } \alpha}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)} + \tfrac{1}{2} A.$$

Aus 1) folgt ferner $x = y$. Eine wirkliche Angabe, wie groß x oder y sein muß, kann aber nicht statt finden, weil es ganz gleichgültig ist, wie groß man diese Kräfte nimmt, wenn nur beide gleichgroß angebracht werden, damit das ganze System weder nach der Richtung cf, noch nach der fc sich bewege, denn in sich zusammen kann ein festes System von Puncten keine Bewegung annehmen.

Aufgabe. XIII. Wenn in der vorigen Aufgabe angenommen wird, daß cd und df *(Fig. 23)* beide um d beweglich sind, wie groß muß dann x und also auch y sein?

Auflösung. I. In f wirken folgende Kräfte: 1stens, in fc die zu bestimmende y; 2tens, normal darauf nach oben die w; nach unten die $\frac{1}{2}$ B, von den parallelen Thätigkeiten in df herrührend, also als Ueberschuß nach oben die $w - \frac{1}{2} B$

$$= \frac{(A+B) \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)};$$

3tens, vermöge der Beweglichkeit in d, nach der Richtung df ein Bestreben, welches durch die Thätigkeiten in 1) und 2) aufgehoben werden muß.

Da nun diese 3 Thätigkeiten in einem Punct in einer Ebene zusammentreffen, so sind sie durchs Parallelogram der Kräfte zu vergleichen, und weil dies Parallelogram hier rechtwinklicht ist, so hat man

$$y = (w - \tfrac{1}{2} B) \text{ tg. } \beta; \text{ oder}$$

$$y = \frac{(A + B) \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)}.$$

Eben so ergiebt sich

$$x = (z - \tfrac{1}{2} A) \text{ tg. } \alpha$$

$$= \frac{(A + B) \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)}.$$

Auflösung. II. Leichter kommt man in diesem Fall auf folgenden Weg zu allen 4 Resultaten. Aus A entspringt in c ein auf cf normales Bestreben $= \frac{1}{2} A$, und in d nach derselben Richtung eines, ebenfalls $= \frac{1}{2} A$; eben so vertheilt sich B zur Hälfte in d und zur Hälfte in f. Die Wirkungen in c und f werden durch einen Theil der zu bestimmenden Kräfte z und w aufgehoben; die in d normal auf cf, deren Größe $= \frac{A + B}{2}$ ist, zerlegt sich auf die widerstehenden Richtungen dc und df, und man erhält nach der Richtung dc ein Bestreben

$$= \frac{(A + B) \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)},$$

und nach der Richtung df eines,

$$= \frac{(A + B) \text{ Sin. } \alpha}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)}.$$

Erstere Kraft äußert in c ihre Thätigkeit, und es entspringt daraus ein Bestreben, normal auf cf,

$$= \frac{(A + B) \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)} \text{ Cos. } \alpha;$$

und nach der Richtung fc eines

$$= \frac{(A + B) \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)} \text{ Sin. } \alpha; \text{ folglich}$$

muß, wenn Gleichgewicht erfolgen soll,

$$z = \frac{(A + B) \text{ Sin. } \beta \text{ Cos. } \alpha}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)} + \tfrac{1}{2} A, \text{ und}$$

$$x = \frac{(A + B) \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)} \text{ sein.}$$

Eben so ergeben sich die Werthe für y und w.

Vierter Abschnitt.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts, wenn Kräfte nach verschiedenen Richtungen in ein festes System von Puncten wirken, welche in verschiedenen Ebenen liegen.

Des vierten Abschnitts erste Abtheilung.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts für den besonderen Fall, daß die Richtungslinien sämmtlicher Kräfte sich alle in einem und denselben Punct schneiden.

Bezeichnungen in dieser Abtheilung.

A; B; C u. s. w. drücke die Größe der Kräfte aus.

$'A$; B' u. s. w. ihre Richtungslinien.

p den Punct, in welchen sich A'; B' u. s. w. schneiden. *(Fig. 24.)*

△ eine durch p gelegte Ebene.

l eine in △ durch p gezogene Linie.

α; β u. s. w. die Neigungswinkel von A'; B' u. s. w. gegen △.

α'; β' u. s. w. die Neigungswinkel ihrer Projectionslinien auf △ gegen l.

A''; B'' u. s. w. diese Projectionslinien selbst.

---

§. 96. Lehrsatz. Wenn die Richtungslinien mehrerer Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen, sich aber alle in einem und denselben Punct p schneiden, so haben sie eine mittlere Kraft.

Beweis. Die Richtungslinien je zweier Kräfte schneiden sich in p, bilden also einen Winkel, und es läßt sich daher, weil sie in einer Ebene liegen, Richtung und Größe ihrer mittleren Kraft angeben. Schließt man so fort, so ersieht man, daß eine mittlere Kraft existirt, deren Richtungslinie ebenfalls durch p gehen muß.

§. 97. Lehrsatz. Wenn, in Beziehung auf eine durch p gelegte Ebene, $\triangle$ und eine in $\triangle$ durch p gezogene Linie l folgende 3 Gleichungen statt finden:

1) $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin } \beta + \ldots\ldots = 0$

2) $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots\ldots = 0$

3) $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + \ldots\ldots = 0;$

so gelten für jede Ebene durch p und jede in ihr durch p gezogene Linie drei eben so gebildete Gleichungen.

Beweis. I. Man behalte $\triangle$ bei, und zeige zuerst, daß auch für eine andere Linie l' in $\triangle$ durch p, welche mit l den unbestimmten Winkel φ bildet, drei eben so gestaltete Gleichungen gelten. Hier ist die Behauptung also, da α; β u. s. w. keine Aenderung erleiden,

1) $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } (\alpha' + \varphi) + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } (\beta' + \varphi) + \ldots = 0$

2) $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } (\alpha' + \varphi) + B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } (\beta' + \varphi) + \ldots = 0.$

Ihre Richtigkeit ergiebt sich augenblicklich, wenn man, in Beziehung auf die erste Behauptung, die erste Vor-

ausſetzung mit Cos. φ; die zweite mit Sin. φ multiplicirt, und die Producte addirt; in Beziehung auf die zweite aber, dieſe mit Cos. φ; jene mit Sin. φ multiplicirt, und letzteres Product vom erſteren ſubtrahirt.

II. Man behalte l bei und denke ſich durch l eine Ebene $\triangle'$ gelegt, welche mit $\triangle$ den Neigungswinkel φ bildet; ſo hat man, wenn, in Beziehung auf $\triangle'$ und l, die Größen (α); (β) u. ſ. w. (α'); (β') u. ſ. w. eben das bedeuten, was α; β u. ſ. w. α'; β' u. ſ. w. in Beziehung auf $\triangle$ und l ausdrücken, die Behauptungen,

1) A Sin. (α) + ... = o

2) A Cos. (α) Sin. (α') + ... = o

3) A Cos. (α) Cos. (α') + ... = o.

Es ſei Fig. 25 auf A'', von p aus, ein beliebiges Stück pG, etwa pG = 1, abgetragen, in G auf pG eine Normale in $\triangle$ errichtet und verlängert, bis ſie in J' die Linie ſchneidet, welche mit A'' einen Winkel = α bildet, ſo wird, wenn man das rechtwinklichte Dreieck pGJ' um pG dreht, bis ſeine Ebene normal auf $\triangle$ ſteht, pJ' = A' in der wirklichen Lage ſein. Zieht man nun in $\triangle$ GH normal auf l, und GJ'' = GJ' normal auf GH; dann HJ'', und dreht die Dreiecksebene GHJ'' um GH, bis ſie normal auf $\triangle$ iſt, ſo fallen GJ'' und GJ' in einander, und der Punct, wo J'' und J' zuſammentreffen, ſoll durch J angedeutet ſein.

Wenn nun die durch l gelegte Ebene $\triangle'$ die Linie GJ in N durchſchneidet, (es iſt in GJ'; N durch N';

in GJ''; N durch N'' angezeigt), und man verlängert HN und fällt JK normal auf diese Verlängerung, so ist JK normal auf Δ', und denkt man sich nun im Raum die Linien Kp und Jp gezogen, so ist $JpK = (\alpha)$ und $FpK = (\alpha')$.

Weil nun aber $GJ = \text{tg.}\ \alpha$ und

$$GN = GH.\ \text{tg.}\ \varphi = \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{tg.}\ \varphi \text{ ist,}$$

so bleibt $JN = \text{tg.}\ \alpha - \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{tg.}\ \varphi$;

folglich $JK = JN\ \text{Cos.}\ \varphi =$

$$(\text{tg.}\ \alpha - \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{tg.}\ \varphi)\ \text{Cos.}\ \varphi; \text{ oder}$$

$$JK = \text{tg.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \varphi - \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{Sin.}\ \varphi.$$

Es ist aber auch

$$JK = pJ.\ \text{Sin.}\ (\alpha) = \text{Sec.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ (\alpha); \text{ daher}$$

$$\text{Sec.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ (\alpha) = \text{tg.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \varphi - \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{Sin.}\ \varphi;$$

und folglich

$$(\text{I}).\quad \text{Sin.}(\alpha) = \text{Sin.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \varphi - \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{Sin.}\ \varphi.$$

Ferner hat man

$$pJ\ \text{Cos.}\ (\alpha) = pK \text{ und}$$

$$-pK\ \text{Cos.}\ (\alpha') = pH = -\text{Cos.}\ \alpha'; \text{ also}$$

$$pJ\ \text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Cos.}\ (\alpha') = \text{Cos.}\ \alpha'; \text{ aber}$$

$$pJ = \text{Sec.}\ \alpha; \text{ daher}$$

$$(\text{II}).\quad \text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Cos.}\ (\alpha') = \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \alpha'.$$

Endlich auch

$$pJ\ \text{Cos.}\ (\alpha) = pK$$

$$pK\ \text{Sin.}\ (\alpha') = HK; \text{ also}$$

$$\text{Sec.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Sin.}\ (\alpha') = HK; \text{ und}$$

$$HK = HN + NK$$

$$= GH\ \text{Sec.}\ \varphi + NJ.\ \text{Sin.}\ \varphi$$

$$= \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{Sec.}\ \varphi + (\text{tg.}\ \alpha - \text{Sin.}\ \alpha'\ \text{tg.}\ \varphi)\ \text{Sin.}\ \varphi$$

$= \text{Sin.}\, \alpha'. \frac{1 - \text{Sin.}\, \varphi^2}{\text{Cos.}\, \varphi} + \text{Sin.}\, \varphi\ \text{tg.}\, \alpha$

$= \text{Cos.}\, \varphi\ \text{Sin}\, \alpha' + \text{Sin.}\, \varphi\ \text{tg.}\, \alpha$; daher

$\text{Sec.}\, \alpha\ \text{Cos.}\, (\alpha)\ \text{Sin.}\, (\alpha') = \text{Cos.}\, \varphi\ \text{Sin.}\, \alpha' + \text{Sin.}\, \varphi\ \text{tang.}\, \alpha$; folglich

(III). $\text{Cos.}\, (\alpha)\ \text{Sin.}\, (\alpha') = \text{Cos.}\, \varphi\ \text{Cos.}\, \alpha\ \text{Sin.}\, \alpha' + \text{Sin.}\, \varphi\ \text{Sin.}\, \alpha$.

Multiplicirt man nun die erste Voraussetzung mit Cos. φ; die 2te mit Sin. φ und subtrahirt letzteres Product vom ersteren, so entsteht

$A\ [\text{Sin.}\, \alpha\ \text{Cos.}\, \varphi - \text{Cos.}\, \alpha\ \text{Sin.}\, \alpha'\ \text{Sin.}\, \varphi] + B\ [\text{Sin.}\, \beta\ \text{Cos.}\, \varphi - \text{Cos.}\, \beta\ \text{Sin.}\, \beta'\ \text{Cos.}\, \varphi] + \ldots = 0.$

Es ist aber nach (I.)

$\text{Sin.}\, \alpha\ \text{Cos.}\, \varphi - \text{Cos.}\, \alpha\ \text{Sin.}\, \alpha'\ \text{Sin.}\, \varphi = \text{Sin.}\, (\alpha)$; und eben so

$\text{Sin.}\, \beta\ \text{Cos.}\, \varphi - \text{Cos.}\, \beta\ \text{Sin.}\, \beta'\ \text{Sin.}\, \varphi = \text{Sin.}\, (\beta)$ u. s. w. folglich hat man

1stens, $A\ \text{Sin.}\, (\alpha) + B\ \text{Sin.}\, (\beta) + \ldots\ldots = 0.$

Multiplicirt man ferner die erste Voraussetzung mit Sin. φ; die zweite mit Cos. φ und addirt beide Producte, so entsteht eben so, nach (III.)

2tens, $A\ \text{Cos.}\, (\alpha)\ \text{Sin.}\, (\alpha') + B\ \text{Cos.}\, (\beta)\ \text{Sin.}\, (\beta') + \ldots = 0.$

Setzt man endlich in die 3te Voraussetzung die Werthe aus (II.); so hat man sogleich

3tens, $A\ \text{Cos.}\, (\alpha)\ \text{Cos.}\, (\alpha') + B\ \text{Cos.}\, (\beta)\ \text{Cos.}\, (\beta') + \ldots = 0$

wie zu beweisen war.

III. Es gelten also die 3 Gleichungen, wenn sie für ein △ und l gegeben sind,

1stens für jede Linie durch p in △.

2tens für jede Ebene △', welche △ in irgend

einer Linie schneidet, in Beziehung auf diese Linie; also auch

3tens, vermöge 1stens, für jede Linie in Δ', d. h. sie sind allgemein gültig.

§. 98. Lehrsatz. Wenn Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken, welche sich alle in einem und denselben Punct p schneiden, und es finden in Beziehung auf irgend eine durch p gelegte Ebene Δ und irgend eine in Δ durch p gezogene Linie folgende 3 Gleichungen statt:

1) $A \operatorname{Sin.} \alpha + \ldots\ldots = 0$

2) $A \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Sin.} \alpha' + \ldots\ldots = 0$

3) $A \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Cos.} \alpha' + \ldots\ldots = 0$;

so stehen diese Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

Beweis. I. Man denke sich jede Kraft in p angreifend, und zerlege jede in 2 Seitenkräfte, von welchen die eine normal auf Δ; die andere nach der Richtung ihrer Projection auf Δ thätig ist; so hat man erstere,

$A \operatorname{Sin.} \alpha$; $B \operatorname{Sin.} \beta$; $C \operatorname{Sin.} \gamma$ u. s. w. letztere,

$A \operatorname{Cos.} \alpha$; $B \operatorname{Cos.} \beta$; $C \operatorname{Cos.} \gamma$ u. s. w.

Da nun aber, vermöge der ersten Voraussetzung, die Summe jener auf Δ normal thätigen Kräfte $= 0$ ist, so findet also keine fortgehende Bewegung nach dieser auf Δ normalen Richtung statt, d. h. die Kräfte $A \operatorname{Sin.} \alpha$; $B \operatorname{Sin.} \beta$ u. s. w. sind, vermöge der Voraussetz. $A \operatorname{Sin.} \alpha + B \operatorname{Sin.} \beta + \ldots\ldots = 0$; untereinander im Gleichgewicht.

II.

II. Man denke sich daher die Kräfte

A Sin. α; B Sin. β u. s. w.

weggenommen, so bleibt nur noch zu beweisen übrig, daß die in $\triangle$ thätigen

A Cos. $\alpha = {}'A$; B Cos. $\beta = {}'B$ u. s. w.

ebenfalls untereinander im Gleichgewicht stehen. Dies folgt aber, vermöge den beiden andern Voraussetzungen,

${}'A$ Sin. $\alpha' + {}'B$ Sin. $\beta' + \ldots\ldots = 0$ und

${}'A$ Cos. $\alpha' + {}'B$ Cos. $\beta' + \ldots\ldots = 0$,

unmittelbar nach §. 72.

III. Es findet also, vermöge 1) und 2), nach keiner der 3 sich unter rechten Winkeln treffenden Richtungen

1stens normal auf $\triangle$ durch p;

2tens nach l in $\triangle$ durch p;

3tens normal auf l in $\triangle$ durch p

ein Bestreben zu fortgehender Bewegung statt, und da nach §. 97 die 3 vorausgesetzten Gleichungen auch für jede andere Ebene durch p und jede in ihr durch p gezogene Linie gelten, so ertheilen also die Kräfte A; B u. s. w. wenn die drei Gleichungen statt finden, dem Punct p nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zur Bewegung mit, sie sind also im vollkommenen Gleichgewicht untereinander.

§. 99. Lehrsatz. Wenn Kräfte, nach verschiedenen Richtungen an einem Punct p wirkend, vollkommenes Gleichgewicht erhalten, so ist auch in Beziehung auf jede Ebene durch p und jede Linie in ihr durch p

1) $A \text{ Sin. } \alpha + \ldots = 0$

2) $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + \ldots = 0$

3) $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha' + \ldots = 0.$

Beweis. Man zerlege in p jede Kraft, wie in §. 98, in zwei Seitenkräfte, eine normal auf △; die andere in △, nach der Projection der ursprünglichen Richtung, auf △ wirkend, so sind erstere

$$A \text{ Sin. } \alpha; \; B \text{ Sin. } \beta \text{ u. s. w.}$$

letztere $A \text{ Cos. } \alpha; \; B \text{ Cos. } \beta$ u. s. w.

Da nun vollkommenes Gleichgewicht, der Voraussetzung gemäß, statt findet, so muß das Bestreben zur Bewegung nach jeder Richtung, also auch nach der, normal auf △ durch p, gleich Null sein. Die Summe

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots$$

drückt aber das Bestreben aus, und folglich hat man also $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0.$

Denkt man sich daher diese Kräfte

$$A \text{ Sin. } \alpha; \; B \text{ Sin. } \beta \text{ u. s. w.}$$

als unter sich Gleichgewicht erhaltend, außer Thätigkeit gesetzt, so bleibt noch Gleichgewicht, und zwar unter den Kräften

$$A \text{ Cos. } \alpha = {}'A; \; B \text{ Cos. } \beta = {}'B \text{ u. s. w.}$$

folglich hat man auch, nach §. 73,

$${}'A \text{ Sin. } \alpha' + {}'B \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0 \text{ und}$$

$${}'A \text{ Cos. } \alpha' + {}'B \text{ Cos. } \beta' + \ldots = 0,$$

wie zu beweisen war.

Hienach gelten also die 3 Gleichungen für die gewählte Ebene und Linie, und also nach §. 97 auch für jede Ebene und Linie durch p.

§. 100. Lehrsatz. Wenn die Richtungslinien mehrerer Kräfte, B; C; D u. s. w. alle in einem Punct p zusammentreffen, so ist ihre mittlere

$$A = \sqrt{[B \operatorname{Sin}\beta + ..]^2 + [B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta' + ..]^2 + [B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + ..]^2}$$

und ihre Lage bestimmt sich durch

$$\operatorname{tg.} \alpha' = \frac{B \operatorname{Cos.} \beta \operatorname{Sin.} \beta' + \ldots}{B \operatorname{Cos.} \beta \operatorname{Cos.} \beta' + \ldots}, \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin.} \alpha = \frac{B \operatorname{Sin.} \beta + \ldots}{A}$$

Beweis. Wenn A die mittlere Kraft ausdrückt, so ist — A die entgegengesetzt mittlere, also diejenige, welche mit B; C u. s. w. vollkommenes Gleichgewicht erhält, und mit A in eine Linie fällt. Es ist daher nach §. 99

1) $- A \operatorname{Sin.} \alpha + B \operatorname{Sin.} \beta + \ldots = 0$

2) $- A \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Sin.} \alpha' + B \operatorname{Cos.} \beta \operatorname{Sin.} \beta' + \ldots = 0$

3) $- A \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Cos.} \alpha' + B \operatorname{Cos.} \beta \operatorname{Cos.} \beta' + \ldots = 0$

und hieraus ergiebt sich, wenn man

$A \operatorname{Sin.} \alpha$; $A \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Sin.} \alpha'$; und $A \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Cos.} \alpha'$

entwickelt, die 3 Resultate quadrirt, addirt, und dann die Quadratwurzel auszieht der angegebene Werth für A. Dividirt man aber das zweite Resultat durchs dritte, so ergiebt sich der behauptete Werth für tg. α'. Für Sin. α ergiebt sich $\frac{B \operatorname{Sin.} \beta + \ldots}{A}$ unmittelbar aus 1), sobald A gefunden ist.

Des vierten Abschnitts zweite Abtheilung.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts im Allgemeinen, wenn Kräfte nach beliebigen Richtungen in irgend ein festes System von Puncten wirken.

Bezeichnungen in dieser Abtheilung.

△ drücke eine Ebene aus, welche die Richtungslinien sämmtlicher Kräfte durchschneidet.

A; B u. s. w. die Größe der Kräfte.

A′; B′ u. s. w. ihre Richtungslinien.

a; b; u. s. w. die Durchschnittspuncte von △ mit A′; B′; u. s. w.

,l eine Linie in △. *(Fig. 26)*.

π einen Punct in ,l.

l′ eine auf ,l durch π in △ normale Linie.

l eine durch π auf △ normale Linie.

′a; ′b u. s. w. die Hebelsarme von A; B; u. s. w. in Beziehung auf irgend eine Achse.

a′; b′ u. s. w. die Normalen von a; b u. s. w. auf ,l.

,a; ,b u. s. w. die zugehörigen Absussen auf ,l von π aus, oder was dasselbe sagt, die Normalen von a; b; u. s. w. auf l′.

a,; b, u. s. w. die Anfangsgeschwindigkeiten von A′; B′ u. s. w. im Fall irgend eine Bewegung entstünde.

$_{\prime}A$; $_{\prime}B$ u. s. w. die Abstände von π aus, auf $_{\prime}l$ gemessen bis zu den Durchschnittspuncten der Projectionen von A'; B' u. s. w. auf Δ mit $_{\prime}l$.

α; β u. s. w. die Neigungswinkel von A'; B' u. s. w. gegen Δ.

α'; β' u. s w. die Neigungswinkel ihrer Projectionen auf Δ gegen $_{\prime}l$.

$\alpha_{\prime}$; $\beta_{\prime}$ u. s. w. die Winkel, welche A'; B' u. s. w. mit Ebenen bilden, welche durch $'a$; $'b$ u. s. w. normal auf die zugehörige Achse gelegt sind.

---

§. 101. Lehrsatz. Wenn folgende 6 Gleichungen

I. $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

II. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0$

III. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + \ldots = 0$

IV. $a' A \text{ Sin. } \alpha + b' B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

V. $_{\prime}a A \text{ Sin. } \alpha + {}_{\prime}b B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

VI. $_{\prime}A A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + {}_{\prime}B B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0$

für irgend ein Δ, π und $_{\prime}l$ gelten, so sind sie allgemeingültig.

Beweis. I. Behält man Δ und $_{\prime}l$ bei, verlegt aber π in $_{\prime}l$, so ändern sich I, II, III, IV nicht, in V und VI aber wachsen blos $_{\prime}a$; $_{\prime}b$ u. s. w. $_{\prime}A$; $_{\prime}B$ u. s. w. um gleichviel, und ihre Gültigkeit für jedes π in $_{\prime}l$ erhellet aus §. 49.

II. Behält man Δ und π bei, nimmt aber anstatt $_{\prime}l$ eine Linie $_{\prime\prime}l$, welche mit $_{\prime}l$ in π den Winkel φ

bildet, (*Fig.* 27) so bleiben α; β u. s. w. unverändert, und setzt man

$$A \, Sin. \, \alpha = \mathfrak{A}; \quad B \, Sin. \, \beta = \mathfrak{B} \text{ u. s. w.}$$

$$A \, Cos. \, \alpha = \mathfrak{A}'; \quad B \, Cos. \, \beta = \mathfrak{B}' \text{ u. s. w.}$$

so hat man die Gültigkeit, folgender Gleichungen darzuthun, in welchen man die Bedeutung der Zeichen aus der Figur leicht erkennen wird:

1) $\mathfrak{A}' \, Sin. \, \alpha'' + \mathfrak{B}' \, Sin. \, \beta'' + \ldots\ldots = o$

2) $\mathfrak{A}' \, Cos. \, \alpha'' + \mathfrak{B}' \, Cos. \, \beta'' + \ldots\ldots = o$

3) $a'' \mathfrak{A} + b'' \mathfrak{B} + \ldots\ldots = o$

4) $_{''}a \, \mathfrak{A} + {_{''}b} \, \mathfrak{B} + \ldots\ldots = o$

5) $_{''}A \, \mathfrak{A}' \, Sin. \, \alpha'' + {_{''}B} \, \mathfrak{B}' \, Sin. \, \beta'' + \ldots\ldots = o$;

und die Voraussetzungen, aus welchen sie hergeleitet werden sollen, sind

(1) $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \ldots\ldots = o$

(2) $\mathfrak{A}' \, Sin. \, \alpha' + \mathfrak{B}' \, Sin. \, \beta' + \ldots\ldots = o$

(3) $\mathfrak{A}' \, Cos. \, \alpha' + \mathfrak{B}' \, Cos. \, \beta' + \ldots\ldots = o$

(4) $a' \mathfrak{A} + b' \mathfrak{B} + \ldots\ldots = o$

(5) $_{'}a \, \mathfrak{A} + {_{'}b} \, \mathfrak{B} + \ldots\ldots = o$

(6) $_{'}A \, \mathfrak{A}' \, Sin. \, \alpha' + {_{'}B} \, \mathfrak{B}' \, Sin. \, \beta' + \ldots\ldots = o$

Es ergeben sich leicht folgende Hülfsleistungen:

$$a'' = a' \, Cos. \, \varphi - {_{'}a} \, Sin. \, \varphi$$

$$_{''}a = a' \, Sin. \, \varphi + {_{'}a} \, Cos. \, \varphi$$

$$_{''}A \, Sin. \, \alpha'' = {_{'}A} \, Sin. \, \alpha' \text{ und } \alpha'' = \alpha' + \varphi.$$

Eben so

$$b'' = b' \, Cos. \, \varphi - {_{'}b} \, Sin. \, \varphi$$

$$_{''}b = b' \, Sin. \, \varphi + {_{'}b} \, Cos. \, \varphi$$

$$_{''}B \, Sin. \, \beta'' = {_{'}B} \, Sin. \, \beta' \text{ und } \beta'' = \beta' + \varphi$$

u. s. w.

Nun multiplicire man (2) mit Cos. φ; (3) mit Sin. φ, und addire beide Producte, so ergiebt sich

$$\mathfrak{A}' \text{ Sin. } \alpha'' + \mathfrak{B}' \text{ Sin. } \beta'' + \ldots = 0.$$

Ferner multiplicire man (3) mit Cos. φ, und (2) mit Sin. φ, so giebt die Differenz beider Producte

$$\mathfrak{A}' \text{ Cos. } \alpha'' + \mathfrak{B}' \text{ Cos. } \beta'' + \ldots = 0$$

Dann multiplicire man (4) mit Cos. φ; (5) mit Sin. φ, so giebt die Differenz

$$a'' \mathfrak{A} + b'' \mathfrak{B} + \ldots = 0.$$

Eben so giebt (4) mit Sin. φ; (5) mit Cos. φ multiplicirt, die Summe dieser Producte

$$_{,,}a \mathfrak{A} + {}_{,,}b \mathfrak{B} + \ldots = 0.$$

Endlich folgt unmittelbar aus (6), weil, in Beziehung auf $_{,}l$,

$$_{,}a = {}_{,}A \text{ Sin. } \alpha' = {}_{,,}A \text{ Sin. } \alpha'' \text{ u. s. w. ist,}$$

$$_{,,}A \mathfrak{A}' \text{ Sin. } \alpha'' + {}_{,,}B \mathfrak{B}' \text{ Sin. } \beta'' + \ldots = 0.$$

III. Behält man $_{,}l$ und π bei, verlegt aber die Ebene, und nimmt eine andere $\triangle'$, welche mit $\triangle$ in $_{,}l$ sich schneidend, den Winkel φ bildet, so ändern sich alle Größen, außer den Kräften selbst. Wenn nun die in Clammern eingeschlossenen Größen, in Beziehung auf $\triangle'$, eben das bedeuten, was sie ohne Clammern in Beziehung auf $\triangle$ bezeichnen, so hat man folgende Gleichungen:

(I) $A \text{ Sin. } (\alpha) + B \text{ Sin. } (\beta) + \ldots = 0$

(II) $A \text{ Cos. } (\alpha) \text{ Sin. } (\alpha') + B \text{ Cos. } (\beta) \text{ Sin. } (\beta') + \ldots = 0$

(III) $A \text{ Cos. } (\alpha) \text{ Cos. } (\alpha') + B \text{ Cos. } (\beta) \text{ Sin. } (\beta') + \ldots = 0$

(IV) $(a') A \text{ Sin. } (\alpha) + (b') B \text{ Sin. } (\beta) + \ldots = 0$

(V) $({}_{,}a) A \text{ Sin. } (\alpha) + ({}_{,}b) B \text{ Sin. } (\beta) + \ldots = 0$

(VI) $({}_{,}A) A \text{ Cos. } (\alpha) \text{ Sin. } (\alpha') + ({}_{,}B) B \text{ Cos. } (\beta) \text{ Sin. } (\beta') + \ldots = 0$

aus denen 6 im Lehrsatz angegeben, herzuleiten.

Um hiezu die nöthigen Hülfsgleichungen zu finden, sei (*Fig.* 28) die Ebene des Papieres = △; trägt man nun in a an die Projection von A′, nemlich an die Verlängerung von Na, den Winkel α an und dreht seine Ebene so lange um diese Verlängerung, bis sie normal auf △ steht, so giebt der neue Schenkel von α die wirkliche Lage von A′ an. Gesetzt nun, △′ schnitte A′ in R′; so ist dies der Punct (a), und zieht man nun NR′ und fällt R′K normal auf Na, KM normal auf ,l; errichtet in K eine Normale KR″ auf KM; macht KR″ = KR′; zieht MR″ und denkt sich nun das Dreieck MKR″ so lange um MK gedreht, bis es normal auf △ steht, so fallen R′ und R″ zusammen; und nennt man diesen lothrecht über K stehenden Punct R; so ist in der angegebenen Lage, Ebene NRM = △′; RM = (a′); πM = (,a); errichtet man nun ferner in a auf Na die Normale aT′ bis in NR′; dann auf aW = a′ in a eine Normale aT″; macht aT″ = aT′; denkt sich auch das Dreieck WaT″ um Wa gedreht, bis es normal auf △ ist, so fallen T′ und T″ zusammen, welcher Punct T heißen soll. Fällt man nun aP normal auf WT, und denkt sich durch R und P in △′ eine gerade Linie gezogen, so ist diese die Projection von A′ auf △′, und schneidet sie ,l in Q; so ist πQR oder πQP (in der wirklichen Lage gedacht) = (α′); der Winkel bei R aber in dem bei P rechtwinklichten Dreieck aPR; also der Winkel aRP ist = (α) und πQ = (,A).

Es ergeben sich nun bald folgende Bestimmungen:

$$\pi W = \pi M - WM; \text{ oder}$$

$$,a = (,a) - aK\ \text{Cos.}\ (180 - \alpha')$$

$$= (,a) + RK\ \text{Cotg.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \alpha'$$

$$= (,a) + (a')\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cotg.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \alpha';$$

dann

$$aW = KM - aK\ \text{Sin.}\ \alpha' \text{ oder}$$

$$a' = (a')\ \text{Cos.}\ \varphi - (a')\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cotg.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha';$$

ferner

$$aP = a'\ \text{Sin.}\ \varphi = aR\ \text{Sin.}\ (\alpha); \text{ oder}$$

$$a'\ \text{Sin.}\ \varphi = (a')\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cosec.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ (\alpha).$$

Ebenfalls

$$WM = RP\ \text{Cos.}\ [180 - (\alpha')]; \text{ oder}$$

$$(,a) - ,a = - aR\ \text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Cos.}\ (\alpha'); \text{ oder}$$

$$,a - (,a) = (a')\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cosec.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Cos}\ (\alpha').$$

Endlich

$$\pi Q = \pi M - QM; \text{ oder}$$

$$(,A) = (,a) - MR\ \text{Cotg.}\ MQR; \text{ oder}$$

$$(,A) = (,a) + (a')\ \text{Cotg.}\ ('a),$$

und aus ihnen durch Entwickelung folgende Hülfsgleichungen:

(1) $\text{Sin.}\ (\alpha) = \text{Cos.}\ \varphi\ \text{Sin.}\ \alpha - \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'$

(2) $\text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Sin.}\ (\alpha') = \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Sin.}\ \alpha + \text{Cos.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'$

(3) $\text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Cos.}\ (\alpha') = \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \alpha'$

(4) $(a')\ \text{Sin.}\ (\alpha) = a'\ \text{Sin.}\ \alpha$

(5) $(,a)\text{Sin}(\alpha) = ,a\text{Cos}\varphi\text{Sin}\alpha - ,a\text{Sin}\varphi\text{Cos}\alpha\text{Sin}\alpha' - a'\text{Sin}\varphi\text{Cos}\alpha\text{Cos}\alpha'$

$= ,a\ \text{Cos.}\ \varphi\ \text{Sin.}\ \alpha - (,a + a'\ \text{Cotg.}\ \alpha')\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'$

$= ,a\ \text{Cos.}\ \varphi\ \text{Sin.}\ \alpha - ,A\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'$

(6) $(,A)\ \text{Cos.}\ (\alpha)\ \text{Sin.}\ (\alpha') = ,a\ \text{Sin.}\ \varphi\ \text{Sin.}\ \alpha + ,A\ \text{Cos.}\ \varphi\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'.$

Eben so ist

$\text{Sin.}(\beta) = \text{Cos.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\beta - \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta'$

$\text{Cos.}(\beta)\,\text{Sin.}(\beta') = \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\beta + \text{Cos.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta'$

$\text{Cos.}(\beta)\,\text{Cos.}(\beta') = \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\beta'$

$(b')\ \text{Sin.}(\beta) = b'\ \text{Sin.}\,\beta$

$({}_{,}b)\ \text{Sin.}(\beta) = {}_{,}b\ \text{Cos.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\beta - {}_{,}B\ \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta'$

$({}_{,}B)\ \text{Cos}(\beta)\ \text{Sin}(\beta') = {}_{,}b\,\text{Sin}\,\varphi\ \text{Sin}\,\beta + {}_{,}B\,\text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos}\,\beta\ \text{Sin}\,\beta'$

u. s. w.

Multiplicirt man nun I. mit Cos. φ, und II. mit Sin. φ und nimmt die Differenz, so ergiebt sich nach (1) die Richtigkeit von (I).

Multiplicirt man aber I. mit Sin. φ, II. mit Cos. φ und nimmt die Summe, so folgt aus (2) die Richtigkeit von (II).

Aus III. und (3) folgt unmittelbar die Richtigkeit von (III).

Eben so aus IV. und (4) die Richtigkeit von (IV).

Multiplicirt man ferner V. mit Cos. φ, dann VI. mit Sin. φ und subtrahirt letzteres Product vom ersteren, so folgt aus (5) die Richtigkeit von (V).

Multiplicirt man endlich auch noch V. mit Sin. φ; VI. mit Cos. φ und addirt, so ergiebt sich nach (6) die Richtigkeit von (VI).

III. Die 6 Gleichungen gelten also, wenn sie für ein $\triangle$, ${}_{,}l$ und π gegeben sind; nach I. auch für $\triangle$, ${}_{,}l$ und π'; nach II. daher auch für $\triangle$, ${}_{,,}l$ und π'; und endlich also auch nach III. für $\triangle'$; ${}_{,,}l$ und π'; d. h. für jede Ebene, jede Linie in ihr und jeden Punct in letzterer; sie sind also allgemeingültig.

§. 102. Zusatz. Aus dem geführten Beweis im vorigen §. ersieht man bei genauer Betrachtung, daß die Allgemeingültigkeit der 3 Gleichungen

I. $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

II. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0$

III. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + \ldots = 0$

ohne Hülfe der übrigen drei Gleichungen dargethan ist. Gelten also diese 3 für eine Ebene und eine Linie in ihr, so gelten sie auch für jede Ebene und jede Linie in ihr. Hieraus erhellet, daß also auch in §. 97 die dortigen 3 Gleichungen nicht blos für Ebenen und Linien durch p, sondern für jede Ebene und jede Linie in ihr gelten. Mit den übrigen 3 Gleichungen hat es nicht dieselbe Bewandniß, denn ihre Allgemeingültigkeit kann, wie man aus dem ersten Theil des Beweises im vorigen §. ersieht, nicht ohne Voraussetzung der ersten Gleichungen erwiesen werden.

§. 103. Lehrsatz. Wenn Kräfte in verschiedenen Ebenen und Richtungen wirken, und es ist in Beziehung auf irgend eine, ihre Richtungslinien durchschneidende Ebene Δ, irgend eine Linie $,l$ in Δ und irgend einen Punct π in $,l$

I. $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

II. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0$

III. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + \ldots = 0$

IV. $a' A \text{ Sin. } \alpha + b' B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

V. $,a A \text{ Sin. } \alpha + ,b B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

VI. $,AA \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + ,BB \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0$

oder was dasselbe sagt,

$$\text{VI.} \left\{ \begin{array}{l} a' A \,\text{Cos.}\, \alpha \,\text{Cos.}\, \alpha' + b' B \,\text{Cos.}\, \beta \,\text{Cos.}\, \beta' + \ldots \\ {}_{,}a A \,\text{Cos.}\, \alpha \,\text{Sin.}\, \alpha' + {}_{,}b B \,\text{Cos.}\, \beta \,\text{Sin.}\, \beta' + \ldots \end{array} \right\} = 0$$

so stehen diese Kräfte, wenn auch das ganze System frei im Raum schwebt, untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

Beweis. I. Man zerlege jede der Kräfte in den, als Angriffspuncte derselben zu betrachtenden Puncten a; b u. s. w. in 2 Seitenkräfte, A Sin. α; B Sin. β u. s. w. und A Cos. α; B Cos. β u. s. w. von welchen die ersteren normal auf $\triangle$, die letzteren aber nach den Projectionslinien ganz in $\triangle$ wirken, und betrachte nun diese Seitenkräfte, anstatt der ursprünglichen Kräfte, als thätig, so sind erstere $'A = A \,\text{Sin.}\, \alpha$; $'B = B \,\text{Sin.}\, \beta$ u. s. w. nach §. 62 untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, weil, den 3 Voraussetzungen, I., IV. und V. zufolge,

$$'A + 'B + \ldots = 0$$

$$a'.'A + b'.'B + \ldots = 0 \text{ und}$$

$${}_{,}a\,'A + {}_{,}b\,'B + \ldots = 0 \text{ ist.}$$

Es bleibt also nur noch zu beweisen, daß auch letztere $A_{,} = A \,\text{Cos.}\, \alpha$; $B_{,} = B \,\text{Cos.}\, \beta$ u. s. w. welche alle in einer Ebene wirken, untereinander vollkommenes Gleichgewicht erzeugen. Dies folgt aber nach §. 88 aus den 3 vorausgesetzten Gleichungen, II., III. und VI.; oder

$$A_{,} \,\text{Sin.}\, \alpha' + B_{,} \,\text{Sin.}\, \beta' + \ldots = 0$$

$$A_{,} \,\text{Cos.}\, \alpha' + B_{,} \,\text{Cos.}\, \beta' + \ldots = 0$$

$${}_{,}A.A_{,} \,\text{Sin.}\, \alpha' + {}_{,}B.B_{,} \,\text{Sin.}\, \beta' + \ldots = 0.$$

II. Es findet also weder nach der Richtung l (nach I.), noch nach der l′ (nach II.), noch nach der ,l (nach III.) ein Bestreben zu fortgehender Bewegung statt. Eben so ist das Bestreben zu drehender Bewegung um ,l (nach IV.), so wie das um l′ (nach V.), als auch das um l (nach VI.), jedes gleich Null, und da die 6 Gleichungen nach §. 101 allgemeingültig sind, so findet also nach keiner einzigen Richtung ein Bestreben zu fortgehender Bewegung, und um keine einzige Achse ein Bestreben zu drehender Bewegung statt; die Kräfte sind also im vollkommenen Gleichgewicht.

§. 104. Lehrsatz. Wenn Kräfte in verschiedenen Richtungen und Ebenen an einem festen System von Puncten thätig, vollkommenes Gleichgewicht untereinander erhalten, so ist auch, in Beziehung auf jedes $\triangle$, ,l und π

I. $A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

II. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0$

III. $A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + \ldots = 0$

IV. $a' A \text{ Sin. } \alpha + b' B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

V. $,a A \text{ Sin. } \alpha + ,b B \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$

VI. $,A A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + ,B B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0$

oder an die Stelle von VI.

$$\left\{ \begin{array}{l} a' A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha' + b' B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + \ldots \\ ,a A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + ,b B \text{ Cos. } \beta \text{ Sos. } \beta' + \ldots \end{array} \right\} = 0$$

Beweis. Zerlegt man die Kräfte in a; b u. s. w. wie im vorigen §. so muß, weil vollkommenes Gleichgewicht vorausgesetzt ist, das Bestreben zu fortge

hender Bewegung nach jeder Richtung, so wie das Bestreben zu drehender Bewegung um jede Achse, allemal = o sein, denn sonst entstünde irgend eine Bewegung, welches der Voraussetzung entgegen ist. Hieraus erhellet, daß obige 6 Gleichungen für jedes $\triangle$, $_{,}l$ und π statt finden müssen, weil sie die Größe dieser Bestreben als = o festsetzen, und ihre Allgemeingültigkeit in §. 101 erwiesen ist.

§. 105. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte, B; C u. s. w. in einem festen System nach verschiedenen Richtungen und in verschiedenen Ebenen wirken, und kein vollkommenes Gleichgewicht untereinander erhalten, so ist es nicht allemal möglich, die Größen A; α; α'; $_{,}a$; a' so zu bestimmen, daß A die entgegensetzt mittlere der übrigen B; C u. s. w. werde, d. h. die Kräfte B; C u. s. w. haben nicht nothwendig eine mittlere Kraft.

Beweis. Es sind 6 Bedingungen zu erfüllen, und nur 5 unbekannte Größen zu entwickeln, nemlich: A; α; α'; $_{,}a$; a'; folglich können widersprechende Resultate entstehen.

§. 106. Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte, B; C u. s. w. in verschiedenen Ebenen und Richtungen wirkend, kein vollkommenes Gleichgewicht erhalten, und man bezeichnet

$$C \text{ Sin. } \gamma + D \text{ Sin } \delta + \ldots\ldots\ldots \text{ mit } G$$
$$C \text{ Cos. } \gamma \text{ Sin. } \gamma' + D \text{ Cos. } \delta \text{ Sin. } \delta' + \ldots\ldots \text{ mit } L$$
$$C \text{ Cos. } \gamma \text{ Cos. } \gamma' + D \text{ Cos. } \delta \text{ Cos. } \delta' + \ldots\ldots \text{ mit } K$$
$$c' C \text{ Sin. } \gamma + d' D \text{ Sin. } \delta + \ldots\ldots \text{ mit } H$$

$,c\,C\ \text{Sin.}\,\gamma + ,d\,D\ \text{Sin.}\,\delta + \ldots$ mit J

$,CC\ \text{Cos.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\gamma' + ,DD\ \text{Cos.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\delta' + \ldots$ mit M

so müssen, wenn es möglich sein soll, die Kräfte B; C u. s. w. durch eine einzige entgegengesetzt mittlere A im Gleichgewicht zu erhalten, in Beziehung auf irgend eine der Kräfte, etwa auf B, die Größen

$$B;\quad \beta;\quad \beta';\quad ,b;\quad b'$$

der Bedingungsgleichung

$$MB\ \text{Sin.}\,\beta + ,b\,GB\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta' + b'\,GB\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\beta' + GM = HB\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\beta' + JB\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta' + b'KB\ \text{Sin.}\,\beta + ,b\,LB\ \text{Sin.}\,\beta + HK + JL$$

entsprechen.

Beweis. Insofern

$$,A = ,a + a'\ \text{Cotg.}\,\alpha'$$

$$,B = ,b + b'\ \text{Cotg.}\,\beta'\ \text{ist}',$$

so sind die 6 Bedingungen fürs Gleichgewicht unter den Kräften A; B; C u. s. w. folgende:

I. $A\ \text{Sin.}\,\alpha + B\ \text{Sin.}\,\beta + G = o$

II. $A\ \text{Cos.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\alpha' + B\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta' + L = o$

III. $A\ \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos.}\,\alpha' + B\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\beta' + K = o$

IV. $a'A\ \text{Sin.}\,\alpha + b'B\ \text{Sin.}\,\beta + H = o$

V. $,a\,A\ \text{Sin.}\,\alpha + ,b\,B\ \text{Sin.}\,\beta + J = o$

VI. $a'\,A\ \text{Cos.}\,\alpha\ \text{Cos.}\,\alpha' + ,a\,A\ \text{Cos.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\alpha' + b'B\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\beta' + ,b\,B\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta' + M = o.$

Bringt man nun in dieser letzten Gleichung ihre letzten 3 Glieder auf die andere Seite, entwickelt dann aus II. $A\ \text{Cos.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\alpha'$ und dividirt dann, so entsteht

$$a'\text{Cotg.}\,\alpha' + ,a = \frac{b'B\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos}\,\beta' + ,bB\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta' + M}{B\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\beta + L} = T$$

Durch Division von IV. und I. ergiebt sich

$$a' = \frac{b' \text{ Sin. } \beta + H}{B \text{ Sin. } \beta + G}$$

Eben so ist aus V. und I.

$$,a = \frac{,b \text{ Sin. } \beta + J}{B \text{ Sin. } \beta + G}$$

Setzt man nun diese Werthe für 'a und ,a in jene erste dargestellte Gleichung und entwickelt dann Cotg. α'; so entsteht

$$\text{Cotg. } \alpha' = \frac{B \text{ Sin. } \beta + G}{b' B \text{ Sin. } \beta + H} \cdot T - \frac{,b B \text{ Sin. } \beta + J}{b' B \text{ Sin. } \beta + H}$$

und dies ist also der aus I., II., IV., V. und VI. entwickelte Werth für Cotg. α'.

Es ergiebt sich aber auch aus III. durch II. dividirt,

$$\text{Cotg. } \alpha' = \frac{B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + K}{B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + L},$$

und beide Werthe müssen einerlei sein, wenn A in Beziehung auf seine Lage vollkommen bestimmt sein soll. Die Gleichsetzung beider Werthe für Cotg. α' liefert aber leicht die behauptete Bedingungsgleichung.

§. 107. Zusatz. Sind also mehrere Kräfte, B; C u. s. w. in verschiedenen Ebenen und Richtungen thätig, und ihre Größe und Lage entspricht der Bedingungsgleichung im vorigen §., so existirt für alle eine mittlere (— A) oder entgegengesetzt mittlere (+ A), deren Größe und Lage leicht anzugeben ist. Es ergiebt sich nemlich

$$A^2 = (B \text{Sin. } \beta + G)^2 + (B \text{Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + L)^2 + (B \text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + K)^2$$

$$\text{tg. } \alpha' = \frac{B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + L}{B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + K};$$

Sin.

$$\text{Sin. } \alpha = - \frac{\text{B Sin. } \beta + \text{G}}{\text{A}}$$

$$_{,}\text{a} = \frac{_{,}\text{b B Sin. } \beta + \text{J}}{\text{B Sin. } \beta + \text{G}}$$

$$\text{a}' = \frac{\text{b}' \text{B Sin. } \beta + \text{H}}{\text{B Sin. } \beta + \text{G}}.$$

§. 108. Zusatz. Sind nur 2 Kräfte, B und C, thätig, so verwandelt sich die Bedingungsgleichung (wenn man zu mehrerer Bequemlichkeit, ,l durch b und c gehend, annimmt) in §. 106, in folgende:

$$\text{Sin. } \beta' : \text{Sin. } \gamma' = \text{tg. } \beta : \text{tg. } \gamma,$$

woraus erhellet, daß B′ und C′ sich schneiden müssen, denn bezeichnet man den Schneidungspunct der Projectionen von B′ und C′ mit k, so liegt ein Punct in B′ über K in der Höhe bk tg. β; und ein Punct in C′ über K in der Höhe ck tg γ. Wenn also

$$\text{bk tg. } \beta = \text{ck tg. } \gamma, \text{ oder wenn}$$

$$\text{ck} : \text{bk} = \text{tg. } \beta : \text{tg. } \gamma \text{ ist,}$$

so schneiden sich B′ und C′.

Es ist aber

$$\text{ck} : \text{bk} = \text{Sin. } \beta' : \text{Sin. } \gamma',$$

also findet Schneidung statt für

$$\text{Sin. } \beta' : \text{Sin. } \gamma' = \text{tg. } \beta : \text{tg. } \gamma.$$

§. 109. Lehrsatz. Wenn Kräfte nach verschiedenen Richtungen in verschiedenen Ebenen wirken, und es ist

1stens in Beziehung auf fortgehende Bewegnug nach irgend einer Richtung die algebraische Summe der mechanischen Momente = 0; so findet nach dieser Richtung keine fortgehende Bewegung statt.

2tens in Beziehung auf drehende Bewegung um irgend eine Achse die algebraische Summe der mechanischen Momente = o; so findet keine Drehung um diese Achse statt.

3tens in Beziehung auf fortgehende Bewegung nach 3 verschiedenen auf einander normalen Richtungen, und zugleich in Beziehung auf drehende Bewegung um 3 verschiedene auf einander normale Achsen, jedesmal die algebraische Summe der mechanischen Momente = o, so findet vollkommenes Gleichgewicht statt.

Beweis. I. In Beziehung auf fortgehende Bewegung.

Angenommen, jeder Punct des Systems durchlaufe nach irgend einer Richtung, alle zu demselben Ziel, den Weg v, so denke man sich △ so gelegt, daß v normal auf △ ist; dann drückt die Summe

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots .$$

das Bestreben zu fortgehender Bewegung nach der Richtung v aus, und es muß also gezeigt werden, daß

$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots . = o$ ist, wenn

$Aa, + Bb, + \ldots .$ als $= o$ gegeben ist,

wobei a,; b, u. s. w. die Annäherungen jedes Punctes der Richtungslinien der Kräfte an ihr Ziel bezeichnen, welche der angenommenen fortgehenden Bewegung v des Systems entsprechen.

Denkt man sich (*Fig.* 29) A' in der Ebene des Papieres, und nimmt NM als Projection von A' auf △ an, denkt sich also △ normal auf die Ebene des

Papieres durch NM, so wird, wenn man aK normal auf NM stellt und = v macht, dann aus K auf A' die Normale KG fällt, aG = $a_{,}$ sein. (§. 19.)

Es ist aber

$$aG = aK.\ \text{Sin.}\ aKG, \text{ oder}$$

$$a_{,} = v\ \text{Sin.}\ \alpha.$$

Eben so $$b_{,} = v\ \text{Sin.}\ \beta$$

$$c_{,} = v\ \text{Sin.}\ \gamma \text{ u. s. w.}$$

Setzt man daher diese Werthe für $a_{,}$; $b_{,}$; $c_{,}$ u. s. w. in die Voraussetzung, so entsteht

$$A\ \text{Sin.}\ \alpha + B\ \text{Sin.}\ \beta + \ldots\ldots = 0.$$

Nimmt man △ parallel mit v, und ,l in △ ebenfalls parallel v, so ergiebt sich eben so bald die Richtigkeit der Gleichung

$$A\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \alpha' + B\ \text{Cos.}\ \beta\ \text{Cos.}\ \beta' + \ldots\ldots = 0.$$

Nimmt man aber △ parallel mit v, und ,l in △ normal auf die vorige Lage, so findet man

$$A\ \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha' + B\ \text{Cos.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \beta' + \ldots\ldots = 0.$$

Beweis. II. In Beziehung auf drehende Bewegung um eine Achse L.

Man lege durch L eine Ebene △, und betrachte L als ,l, so ist das Bestreben zu drehender Bewegung um L = $a' A\,\text{Sin.}\,\alpha + b' B\,\text{Sin.}\,\beta + \ldots\ldots$

Man hat also die

Behaupt. $a' A\,\text{Sin.}\,\alpha + b' B\,\text{Sin.}\,\beta + \ldots\ldots = 0$

und die

Voraussetz. $A a_{,} + B b_{,} + \ldots\ldots = 0$, wobei $a_{,}$; $b_{,}$ u. s. w. sich auf drehende Bewegung um L = ,l beziehen.

Ganz eben so wie §. 66 hat man hier

$$a_{,} = {}^{,}a \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \alpha_{,}$$
$$b_{,} = {}^{,}b \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \beta_{,}$$
$$c_{,} = {}^{,}c \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \gamma_{,} \text{ u. s. w.}$$

wobei φ den Drehungswinkel um L ausdrückt.

Es ist aber, nach §. 66, $\alpha_{,}$ der Wechselswinkel zu dem Winkel, welchen in Fig. 9 Va und Fa in ihrer wirklichen Lage bilden, daher also

$$Va \text{ Sin. } \alpha_{,} = WH, \text{ oder}$$

$$\frac{a'}{\text{Sin. } \alpha'} \text{ Sec. } \alpha \text{ Sin. } \alpha_{,} = a' \text{ Cotg. } \alpha'$$

also $\text{Sin. } \alpha_{,} = \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha'$; daher

$$\text{Cos. } \alpha_{,} = \sqrt{1 - \text{Cos. } \alpha^2 \text{ Cos. } \alpha'^2}$$

Nach §. 64 ist aber

$${}^{,}a = \frac{a' \text{ Sin. } \alpha}{\sqrt{1 - \text{Cos. } \alpha^2 \text{ Cos. } \alpha'^2}}; \text{ folglich}$$

$${}^{,}a \text{ Cos. } \alpha_{,} = a' \text{ Sin. } \alpha.$$

Eben so ist

$${}^{,}b \text{ Cos. } \beta_{,} = b' \text{ Sin. } \beta$$
$${}^{,}c \text{ Cos. } \gamma_{,} = c' \text{ Sin. } \gamma \text{ u. s. w.}$$

Daher, wenn man diese Werthe substituirt,

$$a_{,} = a' \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varphi$$
$$b_{,} = b' \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \varphi$$
$$c_{,} = c' \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varphi \text{ u. s. w.}$$

Aus der Voraussetzung

$$Aa_{,} + Bb_{,} + Cc_{,} + \ldots = 0$$

folgt daher, wenn man für $a_{,}$; $b_{,}$; $c_{,}$ u. s. w. die eben gefundenen Werthe setzt,

$$a'A \text{ Sin. } \alpha + b'B \text{ Sin. } \beta \ldots = 0,$$

wie zu beweisen war.

Eben so ist der Beweis auszuführen, wenn man L in l' oder in l liegend, annimmt.

Beweis. III. Ist in Beziehung auf drei einander normal schneidende Richtungen zu fortgehender Bewegung die algebraische Summe der mechanischen Momente = o, so folgt daraus

$$A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = o$$
$$A \text{ Cos } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots\ldots = o$$
$$A \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \beta' + \ldots\ldots = o;$$

und wenn nun auch in Beziehung auf drehende Bewegung um 3 mit jenen Richtungen parallele Achsen die algebraische Summe der mechanischen Momente gleich Null ist, so folgt daraus

$$a'A \text{ Sin. } \alpha + b'B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = o$$
$$,aA \text{ Sin. } \alpha + ,bB \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = o$$
$$,AA \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + ,BB \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots\ldots = o;$$

und wenn diese 6 Gleichungen statt finden, so existirt auch ein vollkommenes Gleichgewicht.

§. 110. Zusatz. Wirken also Kräfte nach ganz verschiedenen Richtungen in ein festes System von Puncten, welches keine andere Bewegung als nur Drehung um eine mit dem System fast verbundene Achse L annehmen kann, und es ist in Beziehung auf L $\quad Aa, + Bb, + \ldots\ldots = o;$

so erfolgt keine Drehung um L, d. h. die Kräfte sind im unvollkommenen Gleichgewicht. Setzt man nun nach dem vorigen §.

$'a \text{ Cos. } \alpha, \text{ Sin. } \varphi$ für a,

$'b \text{ Cos. } \beta, \text{ Sin. } \varphi$ für b, u. s. w.;

so entspringt aus $Aa_{,} + Bb_{,} + \ldots = 0$ die Gleichung

$$A'a\ \mathrm{Cos.}\ \alpha_{,} + B'b\ \mathrm{Cos.}\ \beta_{,} + \ldots = 0$$

und nicht die:

$$A'a + B.'b + \ldots = 0.$$

Wenn also die algebr. Summe der mechanischen Momente mehrerer Kräfte in verschiedenen Ebenen in Beziehung auf L = o ist, so erfolgt keine Drehung um L; nicht aber, wenn (wie es in den bisherigen Abschnitten der Fall war) die algebr. Summe der statischen Momente dieser thätigen Kräfte A; B u. s. w. in Beziehung auf L = o ist; denn nicht A; B u. s. w. wirken auf Drehung um L, sondern, wie man sich leicht durch Zerlegung dieser Kräfte in den Puncten, wo ihre Richtungslinien mit ihren Hebelsarmen zusammentreffen, überzeugt, $A\ \mathrm{Cos.}\ \alpha_{,}$; $B\ \mathrm{Cos.}\ \beta_{,}$ u. s. w. und die anderen Seitenkräfte, $A\ \mathrm{Sin.}\ \alpha_{,}$; $B\ \mathrm{Sin.}\ \beta_{,}$ u. s. w. wirken parallel mit L, gehen also, in Beziehung auf Bestreben zur Drehung um L, verloren. Eben dies fällt in die Augen, wenn man sich A; B u. s. w. in a; b u. s. w. in 2 Seitenkräfte, eine in △, die andere normal auf △ thätig, zerlegt denkt. Letztere, $A\ \mathrm{Sin.}\ \alpha$; $B\ \mathrm{Sin.}\ \beta$ u. s. w. wirken dann nur auf Drehung um L, und zwar an den Hebelsarmen a'; b' u. s. w., woraus auch a poster. in die Augen fällt, daß $a'\ \mathrm{Sin.}\ \alpha = a'\ \mathrm{Cos.}\ \alpha_{,}$ sein muß.

Das Reduciren einer Kraft (§. 46) in Beziehung

auf eine feste Drehachse, d. h. auf unvollkommenes Gleichgewicht, kann also nur dann durch statische Momente erfolgen, wenn sämmtliche Kräfte alle in einer Ebene oder nach parallelen Richtungslinien thätig sind. Im Allgemeinen, für jede Bewegung und jede Lage der Richtungen der Kräfte, kann es nur durch Gleichstellung der mechanischen Momente ausgeführt werden.

§. 111. Lehrsatz. Wenn Kräfte nach ganz verschiedenen Richtungen in ein festes System von Puncten wirken, und ein vollkommenes Gleichgewicht untereinander erhalten, so ist, sowohl in Hinsicht auf jede fortgehende, als in Hinsicht auf drehende Bewegung um jede Achse, die algebraische Summe der mechanischen Momente gleich Null.

Beweis. I. In Beziehung auf fortgehende Bewegung nach irgend einer Richtung.

Man denke sich in Fig. 30 die beiden bei K rechtwinklichten Dreiecke, aKR′ und MKR″ um aK und MK gedreht, bis beide normal auf der Ebene △ des Papieres stehen; ist nun KR′ = KR″ genommen, so fallen jetzt R′ und R″ in einander, und dieser Punct soll R heißen. Man betrachte sodann Ra als die Richtung A′, und nehme an, jeder Punct des festen Systems bewege sich nach der Richtung der Linie RM um ein Stück RW = v, so ist v Cos. MRa die Annäherung jedes Punctes in A′ an das Ziel von A; d. h. es ist $a_{,}$ = v Cos. MRa.

Es ist aber, wenn φ den Neigungswinkel von v gegen △; und φ′ den seiner Projection auf △ gegen

,l bezeichnet,

$$aM^2 = aK^2 + KM^2 - 2aK.KM \, Cos.(\alpha' - \varphi')$$

und auch

$$aM^2 = aR^2 + RM^2 - 2\,aR.RM \, Cos.\,aRM$$

also, weil

$$aR^2 - aK^2 = MR^2 - KM^2 = RK^2 \text{ ist,}$$

$$aR.RM.\,Cos.\,aRM = RK^2 + aK.KM \, Cos.(\alpha' - \varphi')$$

Nun hat man aber

$$aR = RK \, Cosec.\,\alpha$$
$$RM = RK \, Cosec.\,\varphi$$
$$aK = RK \, Cotg.\,\alpha$$
$$KM = RK \, Cotg.\,\varphi, \text{ also}$$

$$Cosec.\,\alpha \, Cosec.\,\varphi \, Cos.\,aRM = 1 + Cotg.\,\alpha \, Cotg.\,\varphi \, Cos.(\alpha' - \varphi')$$

oder

$$Cos.\,aRM = Sin.\,\varphi \, Sin.\,\alpha + Cos.\,\varphi \, Cos.\,\alpha \, Cos.(\alpha' - \varphi')$$

folglich

$$a, = v \, Cos.\,MRa =$$

$$v \, Sin.\,\varphi \, Sin.\,\alpha + v \, Cos.\,\varphi \, Cos.\,\varphi' \, Cos.\,\alpha \, Cos.\,\alpha' + v \, Cos.\,\varphi \, Sin.\,\varphi' \, Cos.\,\alpha \, Sin.\,\alpha'.$$

Eben so

$$b, = v \, Sin.\,\varphi \, Sin.\,\beta + v \, Cos.\,\varphi \, Cos.\,\varphi' \, Cos.\,\beta \, Cos.\,\beta' + v \, Cos.\,\varphi \, Sin.\,\varphi' \, Cos.\,\beta \, Sin.\,\beta' \text{ u. s. w.}$$

Da nun, der Voraussetzung gemäß, ein vollkommenes Gleichgewicht statt findet, so ist also auch das Bestreben zu fortgehender Bewegung nach jeder Richtung = o; d. h. es ist

1) $A \, Sin.\,\alpha + B \, Sin.\,\beta + \ldots\ldots = o$

2) $A \, Cos.\,\alpha \, Cos.\,\alpha' + B \, Cos.\,\beta \, Cos.\,\beta' + \ldots\ldots = o$

3) $A \, Cos.\,\alpha \, Sin.\,\alpha' + B \, Cos.\,\beta \, Sin.\,\beta' + \ldots\ldots = o.$

Multiplicirt man jetzt 1) mit v Sin. φ; 2) mit v Cos. φ Cos. φ' und 3) mit v Cos. φ Sin. φ' und addirt dann diese 3 Producte, so entsteht

$$A\,[v\ \mathrm{Sin.}\varphi\ \mathrm{Sin.}\alpha + v\ \mathrm{Cos.}\varphi\ \mathrm{Cos.}\varphi'\ \mathrm{Cos.}\alpha\ \mathrm{Cos.}\alpha' + v\ \mathrm{Cos.}\varphi\ \mathrm{Sin.}\varphi'\ \mathrm{Cos.}\alpha\ \mathrm{Sin.}\alpha']$$
$$+ B\,[v\ \mathrm{Sin.}\varphi\ \mathrm{Sin.}\beta + v\ \mathrm{Cos.}\varphi\ \mathrm{Cos.}\varphi'\ \mathrm{Cos.}\beta\ \mathrm{Cos.}\beta' + v\ \mathrm{Cos.}\varphi\ \mathrm{Sin.}\varphi'\ \mathrm{Cos.}\beta\ \mathrm{Sin.}\beta']$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0;$$

oder, wenn man hierin die vorhin gefundenen Werthe setzt,

$$A a_{,} + B b_{,} + \ldots = 0,$$

wie zu beweisen war.

Beweis. II. In Beziehung auf drehende Bewegung um irgend eine Achse.

(I). Denkt man sich eine Achse in Δ, mag sie die $_{,}l$ oder die l' sein, so hat man, wenn φ den Drehungswinkel um diese Achse bezeichnet, im Fall daß eine Drehung um sie entstünde, wie §. 109,

$a_{,} = a'$ Sin. α Sin. φ oder $_{,}a$ Sin. α Sin. φ

$b_{,} = b'$ Sin. β Sin. φ oder $_{,}b$ Sin. β Sin. φ u. s. w.

Weil nun aber, der Voraussetzung gemäß, keine Drehung erfolgt, also sowohl

$$a' A\ \mathrm{Sin.}\alpha + b' B\ \mathrm{Sin.}\beta + \ldots\ldots = 0$$

als $_{,}aA$ Sin. α + $_{,}bB$ Sin. β + ... = 0 ist,

so entsteht hieraus, wenn man mit Sin. φ multiplicirt,

$a' A$ Sin. α Sin. φ + $b' B$ Sin. β Sin. φ + ... = 0 und

$_{,}aA$ Sin. α Sin. φ + $_{,}bB$ Sin. β Sin. φ + ... = 0;

oder

$$A a_{,} + B b_{,} + \ldots\ldots = 0.$$

(II). Denkt man sich eine Achse l normal durch $\triangle$ in a, zerlegt jede Kraft in ihre Seitenkräfte,

A Sin. α; B Sin. β ....

A Cos. α; A Cos. β ....

und denkt sich diese thätig, so würden, wenn eine Drehung um l erfolgte, erstere sich ihrem Ziele nicht nähern, letztere aber, welche mit ihren Richtungslinien in $\triangle$ liegen, erleiden eine Annäherung oder Entfernung; und der Beweis, daß die algebraische Summe ihrer mechanischen Momente, dem vorausgesetzten vollkommenen Gleichgewicht zufolge, gleich Null sein muß, bleibt ganz derselbe, wie in §. 94.

§. 112. Zusatz. Das Prinzip von den virtuellen Geschwindigkeiten erscheint also nun als allgemein gültiges Grundgesetz der ganzen Statik. Es kann folgendergestalt allgemein ausgedrückt werden:

I. Sind in einem festen System von Puncten Kräfte untereinander im Gleichgewicht, so ist die algebraische Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf jede Bewegung gleich Null.

II. a) Wirken Kräfte parallel in einer Ebene, und es ist die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende Bewegung nach einer Richtung und zugleich in Beziehung auf drehende Bewegung um eine Achse gleich Null, so sind diese Kräfte

untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

b) Wirken Kräfte parallel in verschiedenen Ebenen, und es ist die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende Bewegung nach einer Richtung und zugleich in Beziehung auf drehende Bewegung um zwei nicht parallele Achsen, gleich Null, so sind diese Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

c) Wirken Kräfte nach verschiedenen Richtungen in einer Ebene, und es ist die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende Bewegung nach zweierlei Richtungen und zugleich in Beziehung auf drehende Bewegung um eine Achse, gleich Null, so sind diese Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

d) Wirken Kräfte nach verschiedenen Richtungen und in verschiedenen Ebenen, und es ist die algebr. Summe ihrer mechanischen Momente in Beziehung auf fortgehende Bewegung nach dreierlei Richtungslinien und zugleich in Beziehung auf drehende Bewegung um drei verschiedene nicht parallele

Achsen, gleich Null, so sind diese Kräfte untereinander im vollkommenen Gleichgewicht.

§. 113. Zusatz. Sind nur zwei Kräfte, A; B in Beziehung auf drehende Bewegung um eine feste Achse mit einander im Gleichgewicht, so ist

$$Aa_{,} + Bb_{,} = 0;\ \text{also}$$

$$A : B = b_{,} : (-a_{,}),$$

d. h. die Kräfte verhalten sich umgekehrt, wie die Wege, welche sie, im Fall eine Drehung entstünde, gleichzeitig durchlaufen würden. Dieser Satz ist insbesondere unter dem Namen des kartesischen Grundsatzes bekannt.

Anwendungen der Lehren des vierten Abschnitts.

Aufgabe. I. Drei Kräfte, B; C; D; wirken nach verschiedenen Richtungen in verschiedenen Ebenen, so daß ihre Richtungslinien, B'; C'; D'; sich alle in einem Punct p schneiden. Die Winkel, welche B'; C'; ferner B'; D' und C'; D' bilden, sollen durch (BC), (BD) und (CD) ausgedrückt werden. Man soll die mittlere Kraft A dieser 3 Kräfte durch diese Winkel und die Kräfte selbst darstellen.

Auflösung. Man lege $\triangle$ durch B' und C' und nehme B' als I; so ist $\beta = 0$; $\beta' = 180°$; $\gamma = 0$; also nach §. 100

$$A = \sqrt{D^2 \text{Sin.} \delta^2 + (C \text{Sin.} \gamma + D \text{Cos.} \delta \text{Sin.} \delta')^2 + (-B + G \text{Cos.} \gamma' + D \text{Cos.} \delta \text{Cos.} \delta'^2)}$$

$$= \sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - 2BC \text{Cos} \gamma' - 2BD \text{Cos} \delta \text{Cos} \delta' + 2CD \text{Cos} \delta \text{Cos} (\delta' - \gamma')}$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$\text{Cos.} \gamma' = - \text{Cos.} (BC)$$

$$\text{Cos.} \delta \text{ Cos.} \delta' = - \text{Cos.} (BD)$$

$$\text{Cos.} \delta \text{ Cos.} (\delta' - \gamma') = \text{Cos.} (CD) \text{ ist;}$$

folglich entsteht:

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 + D^2 + 2BC \text{Cos}(BC) + 2BD \text{Cos}(BD) + 2CD \text{Cos}(CD)}$$

Aufgabe. II. Es wirken 3 Kräfte, $B = 10$; $C = 5$; $D = 6$; in verschiedenen Richtungen und Ebenen. In Beziehung auf ein angenommenes $\triangle$, $,l$ und l' ist

$b' = 0$; $,b = 0$; $\beta' = 120°$;

$c' = 4$; $,c = 3$; $\gamma = 45°$; $\gamma' = 90°$;

$d' = 0$; $,d = 5$; $\delta = 30°$; $\gamma = 150°$;

man soll β so bestimmen, daß es möglich wird, diese 3 Kräfte durch eine einzige entgegengesetzt mittlere im Gleichgewicht zu erhalten.

Auflösung. Nach §. 106 ist hier

$G = C \text{ Sin.} \gamma + D \text{ Sin.} \delta = 6,5355 \ldots$

$L = C \text{ Cos.} \gamma \text{ Sin.} \gamma' + D \text{ Cos.} \delta \text{ Sin.} \delta' = 6,1336 \ldots$

$K = C \text{ Cos.} \gamma \text{ Cos.} \gamma' + D \text{ Cos.} \delta \text{ Cos.} \delta' = - 4,5 \ldots$

$H = c'C \text{ Sin.} \gamma + d'D \text{ Sin.} \delta = 14,1421 \ldots$

$J = ,cC \text{ Sin.} \gamma + ,dD \text{ Sin.} \delta = 25,6065 \ldots$

$M = ,CC \text{ Cos.} \gamma \text{ Sin.} \gamma' + ,DD \text{ Cos.} \delta \text{ Sin.} \delta' = 23,597 \ldots$

und die Bedingungsgleichung wird

$$235,97 \text{ Sin.} \beta + 60,8076 = 151,0417 \text{ Cos.} \beta.$$

Setzt man nun $\frac{151,0417}{235,97} = \text{tg.} \varrho$; so ergiebt sich

$\varrho = 32^\circ\ 37'\ 22''$ und die Bedingungsgleichung verwandelt sich in folgende:

$$\text{Sin.}\ \beta + \frac{60{,}8076}{235{,}97} = \text{tg.}\ \varrho\ \text{Cos.}\ \beta \text{ oder}$$

$$\frac{60{,}8076}{235{,}97}\ \text{Cos.}\ \varrho = \text{Sin.}\ (\varrho - \beta),$$

woraus man, da ϱ bekannt ist,

$$\beta = 20^\circ\ 5'\ 16''\ \text{erhält.}$$

Aufgabe. III. Zu den 3 Kräften,

$$B = 10;\quad C = 5;\quad D = 6;$$

deren Richtung in Beziehung auf ein angenommenes $\triangle$, $_{,}l$ und l' nach der vorigen Aufgabe, durch

$$b' = 0;\quad {}_{,}b = 0;\quad \beta = 20^\circ\ 5'\ 16'';\quad \beta' = 120^\circ$$
$$c' = 4;\quad {}_{,}c = 3;\quad \gamma = 45^\circ;\quad \gamma' = 90^\circ$$
$$d' = 0;\quad {}_{,}d = 5;\quad \delta = 30^\circ;\quad \delta' = 150^\circ$$

bestimmt sind, die Richtung und Größe der entgegengesetzt mittleren Kraft A zu bestimmen.

Auflösung. Nach §. 107 erhält man

$$A = -19{,}68;$$
$$\alpha = 30^\circ\ 25'\ 44''$$
$$\alpha' = 122^\circ\ 48'\ 16''$$
$$a' = 1{,}4185\ \ldots$$
$${}_{,}a = 2{,}5785\ \ldots$$

Aufgabe. IV. In Beziehung auf eine feste Drehachse $_{,}l$ in $\triangle$ soll A so bestimmt werden, daß ein unvollkommenes Gleichgewicht entsteht. Gegeben sind

$$\alpha;\ \alpha';\ {}_{,}a;\ a';$$
$$B;\ \beta;\ \beta';\ {}_{,}b;\ b'$$

u. s. w.

Auflösung. Aus

$$a'A \text{ Sin. } \alpha + b'B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0$$

entspringt

$$A = -\frac{b'B \text{ Sin. } \beta + c'C \text{ Sin. } \gamma + \ldots\ldots}{a' \text{ Sin. } \alpha}.$$

Aufgabe. V. Die verschiedenen Gegenwirkungen, welche ,l in der vorigen Aufgabe leisten muß, zu bestimmen.

Auflösung. 1stens. Nennt man die Gegenwirkung normal auf △, M; so hat man

$$-M + A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0;$$

also

$$M = A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots$$

2tens. Die Stelle, wo M gegenwirken muß, ergiebt sich aus

$$-{,m}M + {,a}A \text{ Sin. } \alpha + {,b}B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots = 0;$$

nemlich

$${,m} = \frac{{,a}A \text{ Sin. } \alpha + {,b}B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots}{A \text{ Sin. } \alpha + B \text{ Sin. } \beta + \ldots\ldots}.$$

3tens. Setzt man die Gegenwirkung normal auf ,l in △, = R; so hat man

$$-R + A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots = 0;$$

also

$$R = A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots\ldots$$

4tens. Die Stelle, wo R gegenwirken muß, findet man aus

$$-{,r}R + {,a}A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + {,b}B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta + \ldots = 0$$

nemlich

$${,r} = \frac{{,a}A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + {,b}B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots\ldots}{A \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \alpha' + B \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \beta' + \ldots\ldots}$$

5tens. Wird die Gegenwirkung nach der Richtung ,l mit N bezeichnet, so hat man

$$-N + A \text{Cos.}\,\alpha \,\text{Cos.}\,\alpha' + B \text{Cos.}\,\beta \,\text{Cos.}\,\beta' + \ldots = 0$$

folglich

$$N = A \text{Cos.}\,\alpha \,\text{Cos.}\,\alpha' + B \text{Cos.}\,\beta \,\text{Cos.}\,\beta' + \ldots$$

Die Stelle für N ist in ,l gleichgültig.

Soll also vollkommenes Gleichgewicht hervorgebracht werden, so muß noch nach der Richtungslinie ,l eine Kraft = N, normal auf △ in ,l; eine Kraft = M am Endpunct von ,m; und in △ normal auf ,l eine Kraft = R am Endpunct von ,r angebracht werden. Entsteht zufällig ,r = ,m; so kann eine einzige Gegenwirkung das vollkommene Gleichgewicht hervorbringen, und ihre Größe oder P ist

$$= \sqrt{M^2 + R^2 + N^2};$$

ihre Richtung aber bestimmt sich durch

$$\text{Tg.}\,\pi' = \frac{R}{N} \text{ und}$$

$$\text{Tg.}\,\pi = \frac{M}{\sqrt{R^2 + N^2}}$$

Aufgabe. VI. Es sei PQRW eine feste dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche PRW (*Fig.* 31) durch △ ausgedrückt werden soll; jede der 3 Linien, QR; QP; QW; werde normal auf △ in allen ihren Puncten von gleichgroßen Kräften angegriffen, deren Summen A, B, C sein mögen; in Q wirke ebenfalls normal auf △ eine Kraft = D. Wie groß müssen in R; P; W die Gegenwirkungen x; y; z normal auf △ sein, wenn das Gleichgewicht bestehen soll?

Auf-

Auflösung. Nimmt man eine fortgehende Bewegung normal auf $\triangle$ an, so entsteht nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

1) $x + y + z = A + B + C + D.$

Ferner entsteht, a als Drehachse betrachtet,

2) $y\, b\, \text{Sin.}\, \gamma + C \tfrac{1}{2} c\, \text{Sin.}\, \beta = z\, c\, \text{Sin.}\, \beta + B \tfrac{1}{2} b\, \text{Sin.}\, \gamma.$

Nimmt man aber b als Drehachse, so ergiebt sich

3) $x\, a\, \text{Sin.}\, \gamma + C \tfrac{1}{2} c\, \text{Sin.}\, \alpha = z\, c\, \text{Sin.}\, \alpha + A \tfrac{1}{2} a\, \text{Sin.}\, \gamma,$

und aus diesen 3 Gleichungen entspringt

$$x = \frac{b\,c\,\text{Sin}\,\alpha\,(2A + B + C + 2D) + a\,A\,(b\,\text{Sin.}\,\gamma + c\,\text{Sin.}\,\beta)}{2\,(a\,b\,\text{Sin.}\,\gamma + a\,c\,\text{Sin.}\,\beta + b\,c\,\text{Sin.}\,\alpha)}$$

$$y = \frac{a\,c\,\text{Sin.}\,\beta\,(A + 2B + C + 2D) + b\,B\,(a\,\text{Sin.}\,\gamma + c\,\text{Sin.}\,\alpha)}{2\,(a\,b\,\text{Sin.}\,\gamma + a\,c\,\text{Sin.}\,\beta + b\,c\,\text{Sin.}\,\alpha)}$$

$$z = \frac{a\,b\,\text{Sin}\,\gamma\,(A + B + 2C + 2D) + c\,C\,(a\,\text{Sin.}\,\beta + b\,\text{Sin.}\,\alpha)}{2\,(a\,b\,\text{Sin.}\,\gamma + a\,c\,\text{Sin.}\,\beta + b\,c\,\text{Sin.}\,\alpha)}$$

Aufgabe. VII. Nimmt man in der vorigen Aufgabe die Pyramide nicht als fest an, sondern setzt voraus, daß die Linien QR, QP, QW um Q beweglich sind, so müssen, wenn ein Ausgleiten dieser Linien auf $\triangle$ verhindert werden soll, in den Durchschnittslinien von $\triangle$, mit Ebenen, welche durch QR, QP, QW normal auf $\triangle$ gelegt sind, noch Gegenkräfte, x'; y'; z' angebracht werden. Man soll die Größe derselben bestimmen.

Auflösung. Blos in Beziehung auf die Kräfte, welche QR angreifen, muß x blos $= \tfrac{1}{2} A$ sein, und es ist also $x - \frac{A}{2}$ die Größe der auf $\triangle$ normalen Wirkung in R, welche aus den vereinten Thätigkeiten in Q durch Fortpflanzung längs der festen Linie QR

entspringt. Die 3 Kräfte, $x - \frac{A}{2}$; x' und die längs der Linie QR sind also durch das Parallelograms der Kräfte zu vergleichen, welches hier rechtwinklicht erscheint, so daß also

$$x' = (x - \frac{A}{2}) \text{ Cotg. } \alpha' \text{ ist.}$$

Nimmt man den Werth für x aus der vorigen Auflösung, so erhält man

$$x' = \frac{bc \text{ Sin. } \alpha (A + B + C + 2D)}{2(ab \text{ Sin. } \gamma + ac \text{ Sin. } \beta + bc \text{ Sin. } \alpha)} \text{ Cotg. } \alpha'$$

Eben so ergiebt sich

$$y' = \frac{ac \text{ Sin. } \beta (A + B + C + 2D)}{2(ab \text{ Sin. } \gamma + ac \text{ Sin. } \beta + bc \text{ Sin. } \alpha)} \text{ Cotg. } \beta'$$

und

$$z' = \frac{ab \text{ Sin. } \gamma (A + B + C + 2D)}{2(ab \text{ Sin. } \gamma + ac \text{ Sin. } \beta + bc \text{ Sin. } \alpha)} \text{ Cotg. } \gamma'.$$

Verbesserungen zum ersten Bändchen.

Seite 27 §. 41 bezieht sich auf *Fig.* 3.
— 29 Zeile 17 von oben, 3te Behauptung für Behauptung.
— 36 — 14 v. o. Y für (Y).
— 55 — 8 v. u. wirklichen für merkwürdigen.
— 56 — 6 v. u. b' für b,.
— 56 — 2 v. u. Normalen für Normale.
— 57 — 12 v. u. ,b für 'b.
— 62 — 12 v. u. aW für AW.
— 62 — 4 v. u. schnittspunct für schnitts.
— 66 — 9 v. o. 'a für 'A.
— 84 in 9) $B^2 + A^2$ für $B^2 + C^2$.
— 92 ist der Beweis zu §. 80 wegzustreichen, und folgender dafür zu setzen:

Beweis. Bezeichnet man den Winkel pfh mit x, so hat man, vermöge der Construction,

$$B : C = \text{Sin. } x : \text{Sin. } (a - x)$$
$$= \text{tg. } x : \text{Sin. } a - \text{Cos. } a \text{ tg. } x.$$

Aus dem vorausgesetzten Gleichgewicht folgt aber auch

$$B : C = \text{Sin. } b : \text{Sin. } c$$
$$= \text{Sin. } b : - \text{Sin. } (a + b)$$

und folglich ist

$$\text{tg. } x : \text{Sin. } a - \text{Cos. } a. \text{ tg. } x = \text{Sin. } b : - \text{Sin. } (a + b);$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\text{tg. } x = - \text{tg. } b;$$

daher ist x das Suplement zu b, folglich fällt pf mit A' in eine Richtung.

Nun hat man ferner, vermöge der Construction,

$$B : pf = \text{Sin. } x : \text{Sin. } a$$
$$= \text{Sin. } b : \text{Sin. } a$$

und weil Gleichgewicht ist,

$$B : A = \text{Sin. } b : \text{Sin. } a$$

und aus beiden Proportionen ergiebt sich

$$pf = A.$$

Seite 135 Zeile 5 v. u. $\text{Cos.}(\beta')$ für $\text{Sin.}(\beta')$.

— 142 §. 106. Die in diesem §. aufgestellte Bedingungsgleichung nimmt die einfachere Gestalt $GM = HK + JL$ an, wenn man

$$B\,\text{Sin.}\,\beta + C\,\text{Sin.}\,\gamma + \ldots\ldots = G$$
$$B\,\text{Cos.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\beta' + C\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\gamma' + \ldots\ldots = L$$
$$B\,\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\beta' + C\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\gamma' + \ldots\ldots = K$$
$$b'B\,\text{Sin.}\,\beta + c'C\,\text{Sin.}\,\gamma + \ldots\ldots = H$$
$${}_{,}bB\,\text{Sin.}\,\beta + {}_{,}cC\,\text{Sin.}\,\gamma + \ldots\ldots = J$$ und
$${}_{,}BB\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Sin.}\,\beta' + {}_{,}CC\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\gamma' + \ldots\ldots = M$$ setzt.

Es sind nemlich die Kräfte A, B, C etc. untereinander im vollkommenen Gleichgewicht, wenn

1) $A\,\text{Sin.}\,\alpha + G = 0$

2) $A\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\alpha' + L = 0$

3) $A\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha' + K = 0$

4) $a'A\,\text{Sin.}\,\alpha + H = 0$

5) $a'A\,\text{Sin.}\,\alpha + J = 0$ und

6) $a'A\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha' + {}_{,}aA\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\alpha' + M = 0$ ist; und da nun aus 1) und 6)

$GM = a'A^2\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha' + {}_{,}aA^2\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\alpha'$

aus 2) und 5) $JL = {}_{,}aA^2\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\alpha'$

und aus 3) u. 4) $HK = a'A^2\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha'$ entsteht,

so folgt sogleich $GM = HK + JL$.

— 144 §. 107. Bei der so eben angegebenen Bezeichnung ist nun

$$A^2 = G^2 + L^2 + K^2$$

$$\text{tg.}\,\alpha' = \frac{L}{K}$$

$$\text{Sin.}\,\alpha = -\frac{G}{A}$$

$$a' = \frac{H}{G}$$

$${}_{,}a = \frac{J}{G}.$$

Fig. 1.

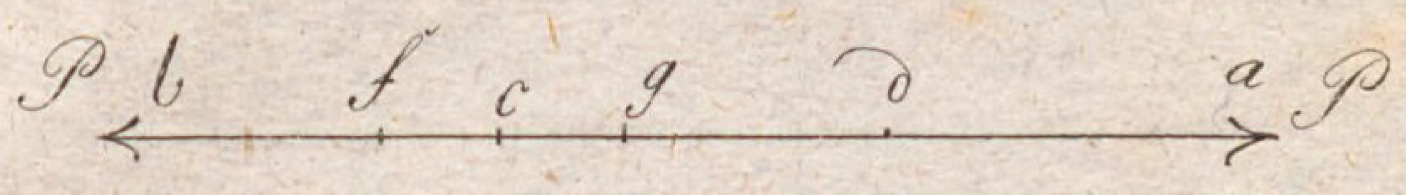


Fig. 2.

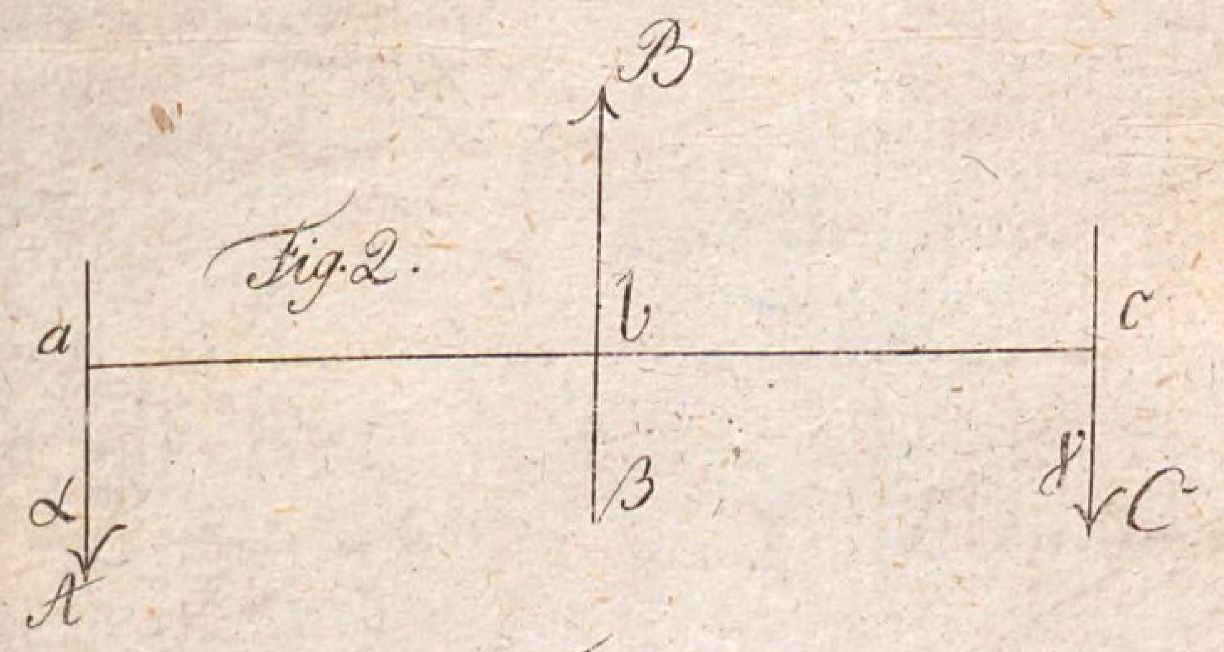


Fig. 3.

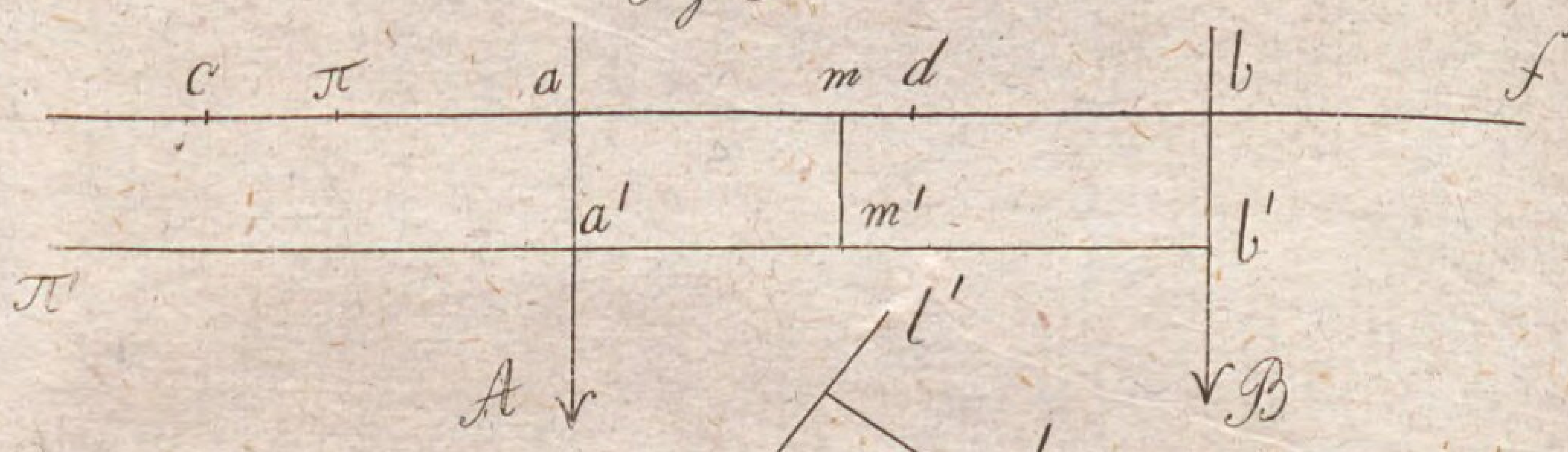


Fig. 4.

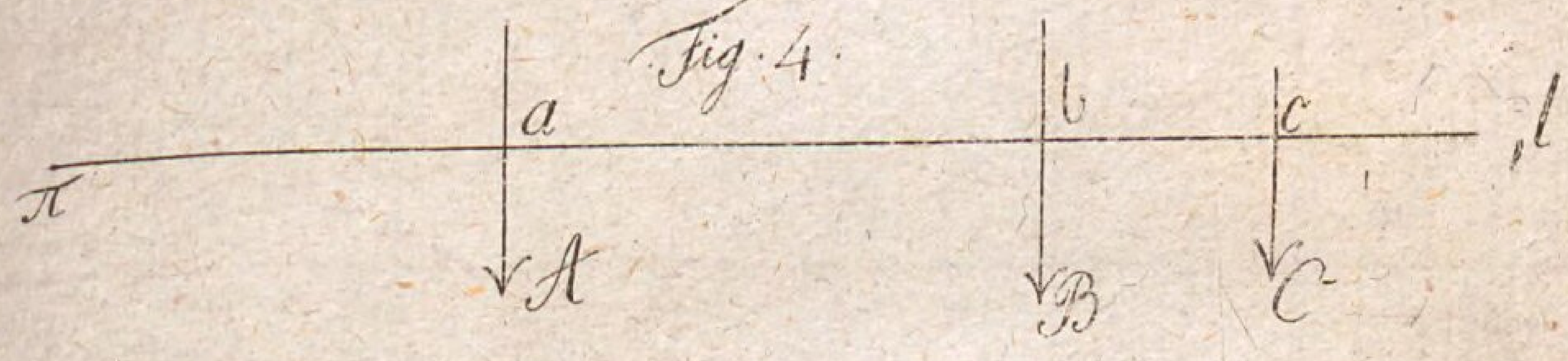


Fig. 5.

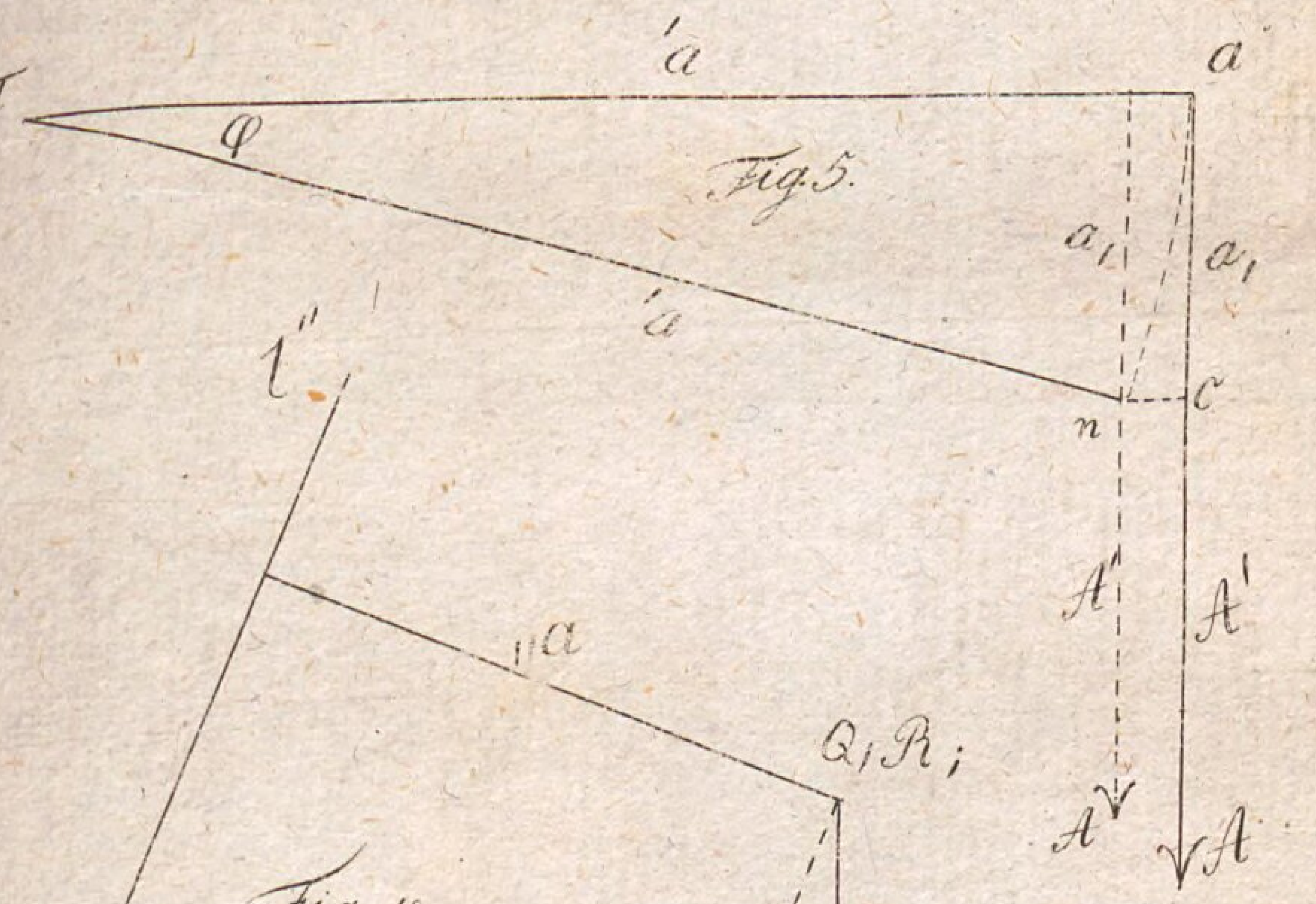


Fig. 6.

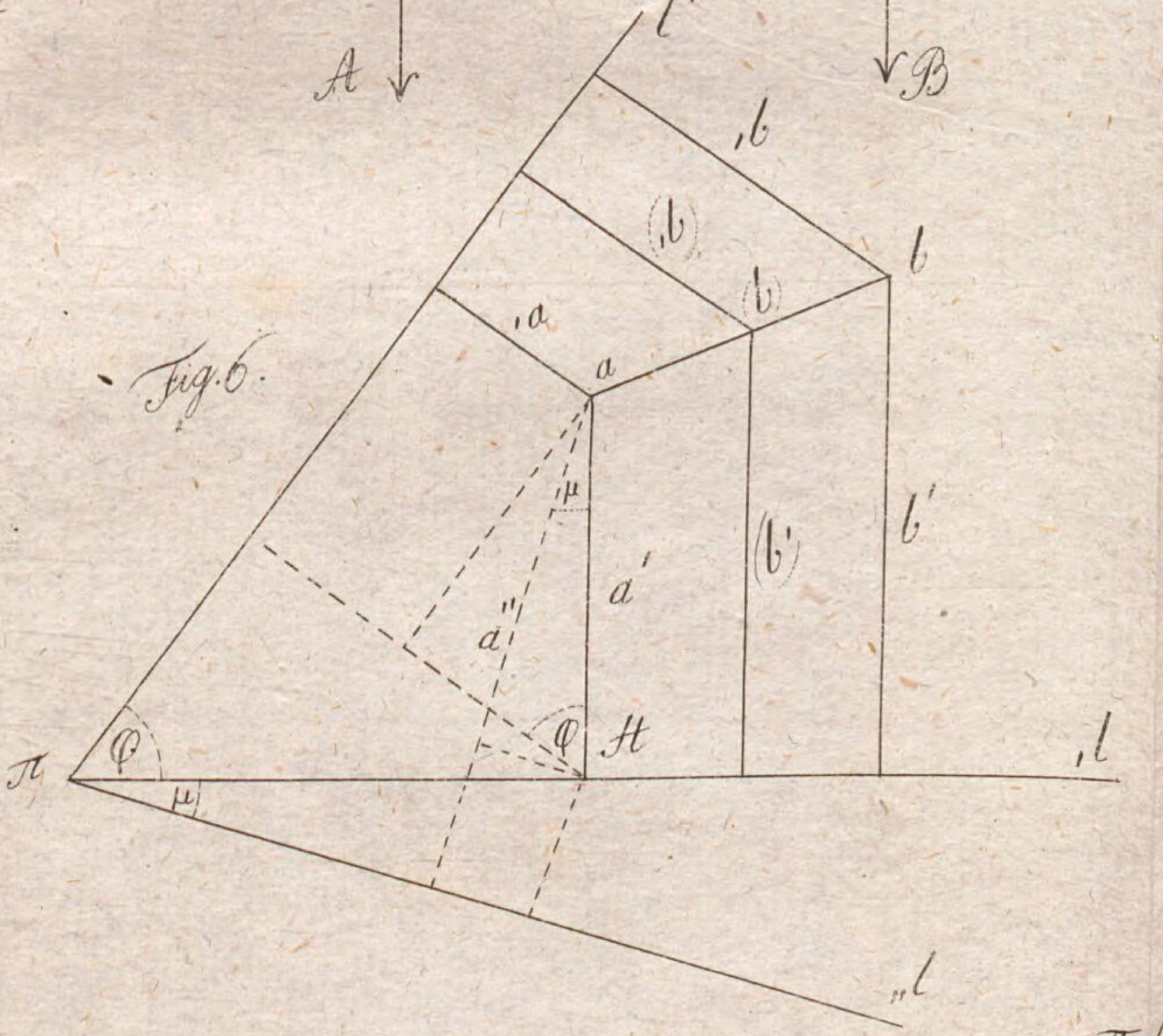


Fig. 8.

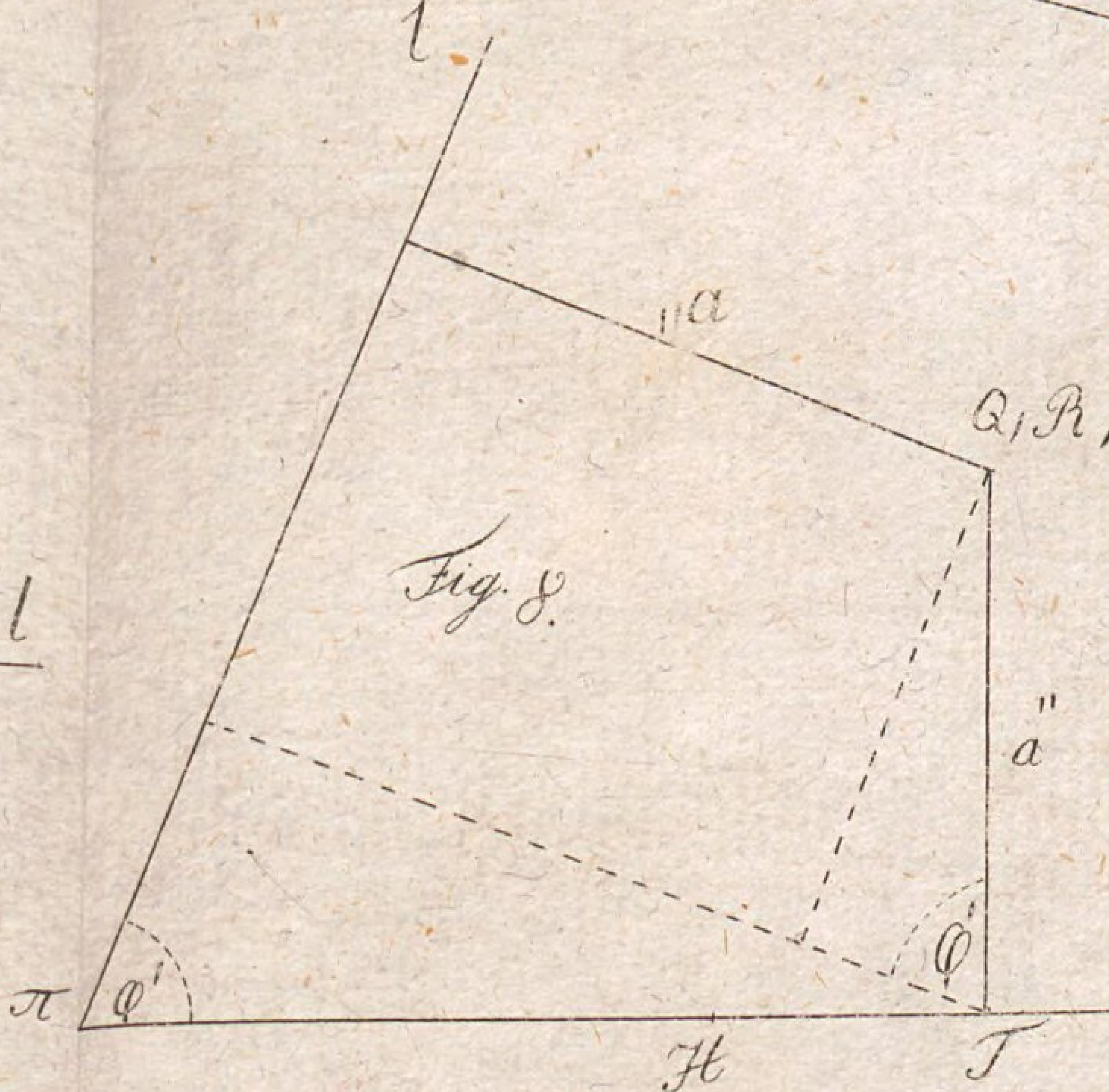
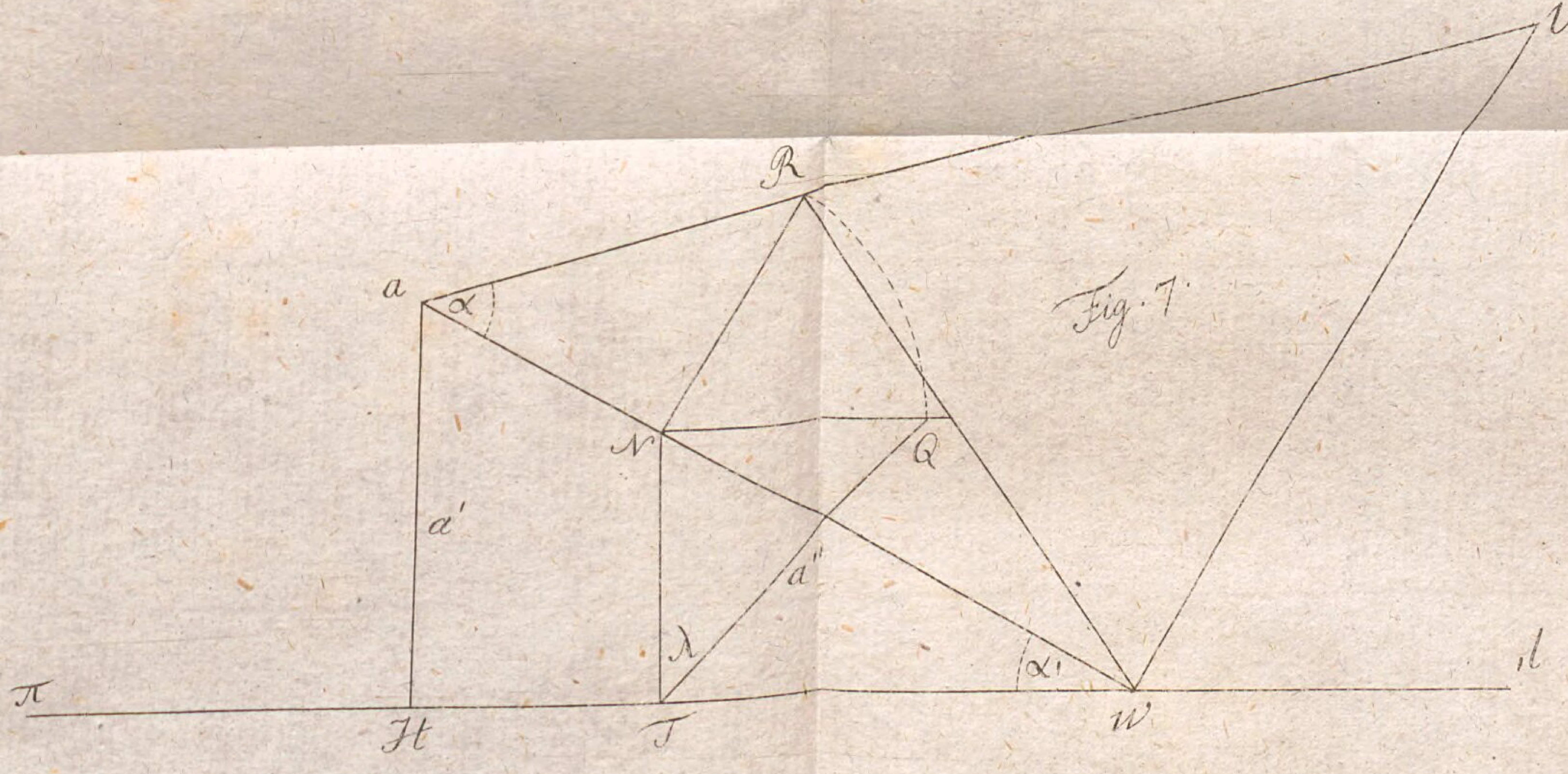


Fig. 7.



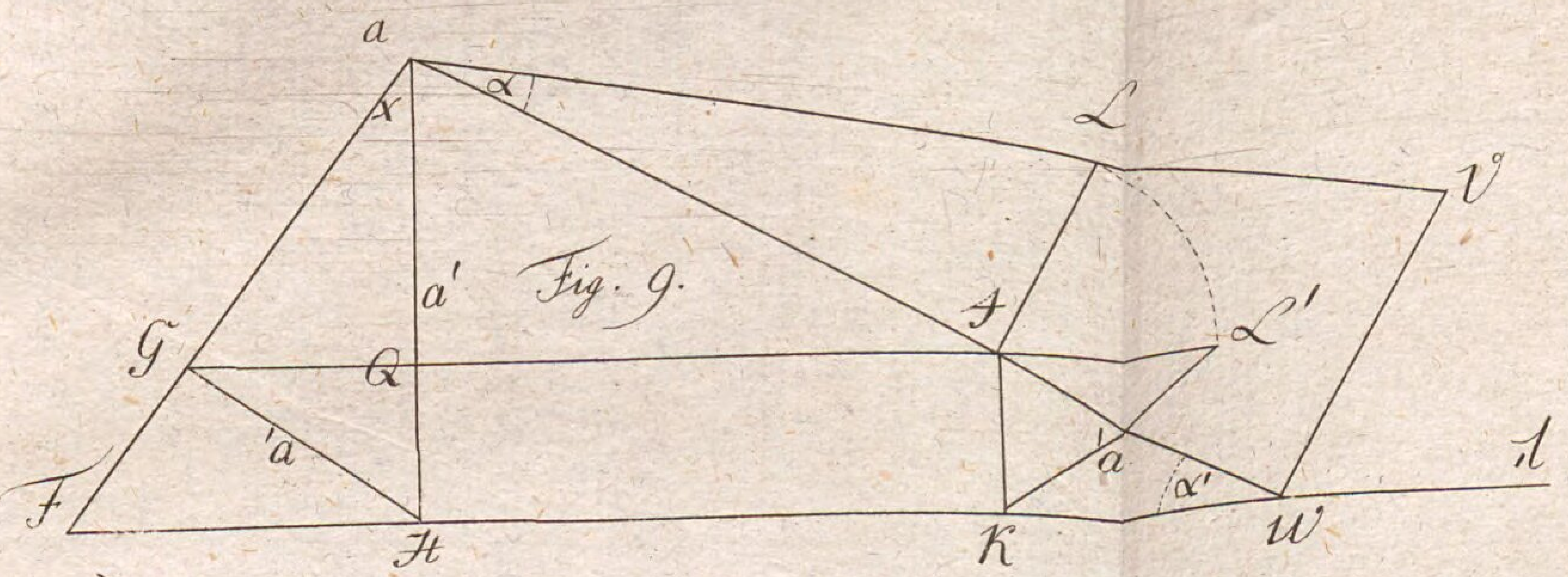


Fig. 9.

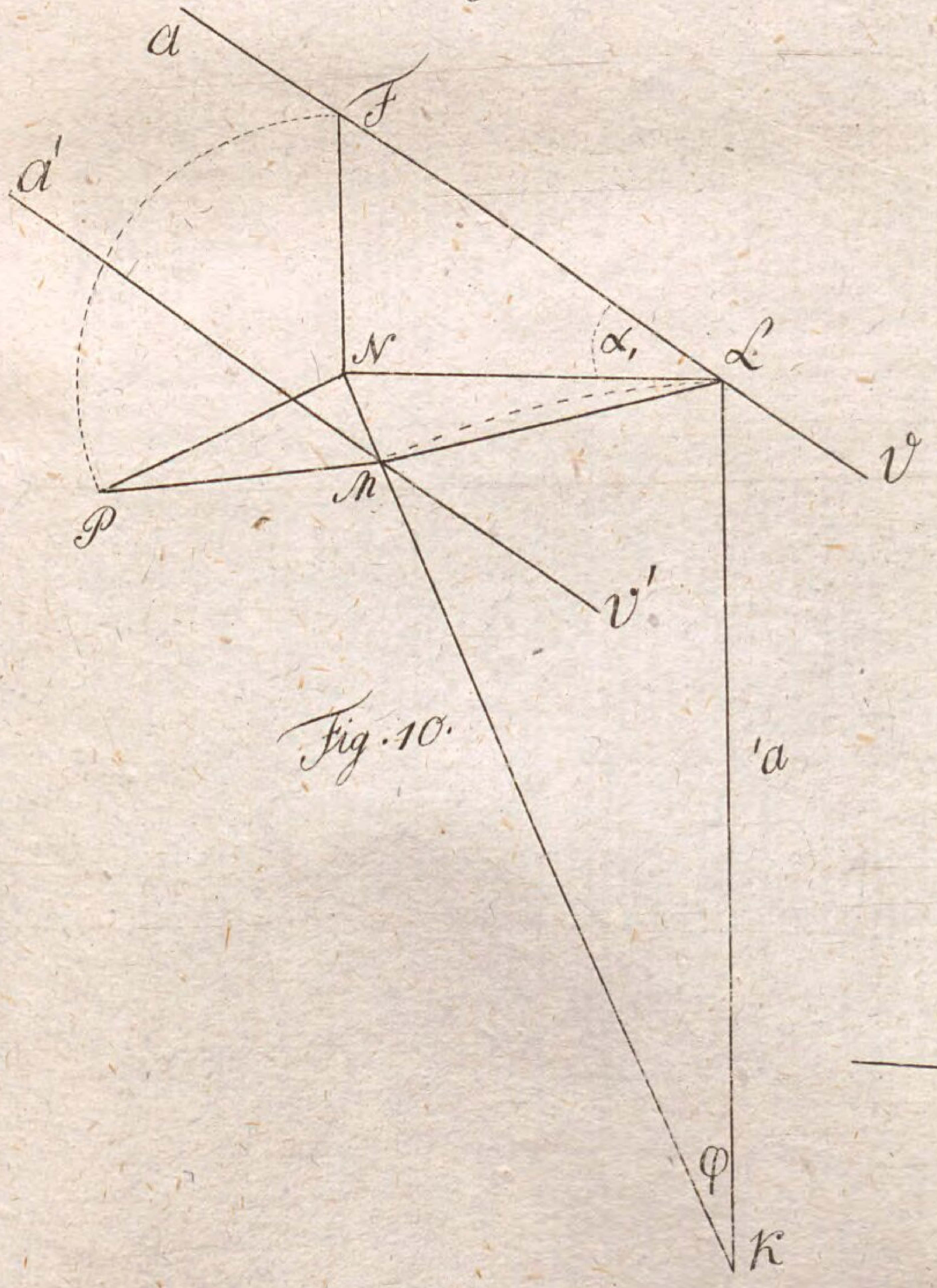


Fig. 10.

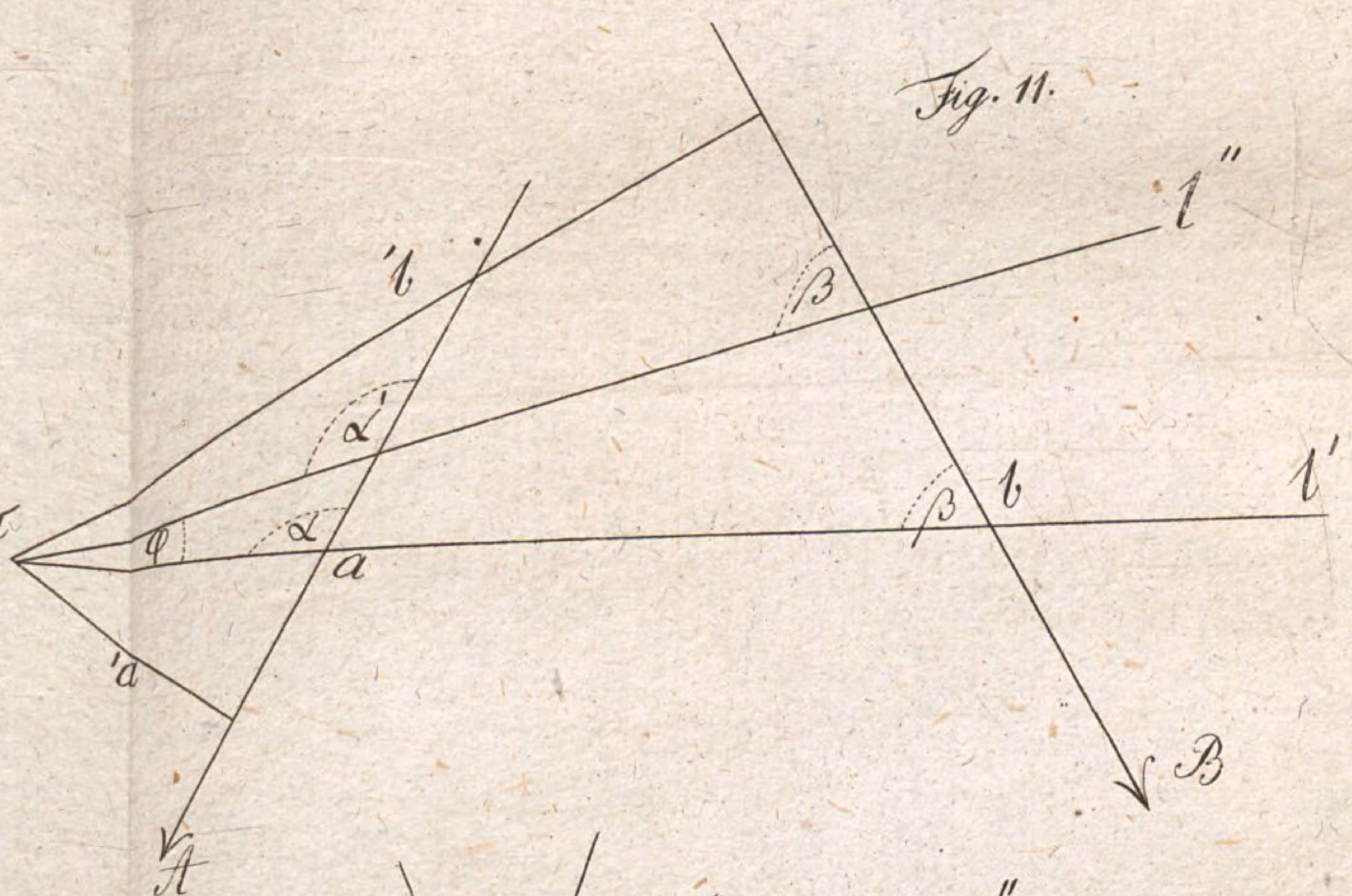


Fig. 11.

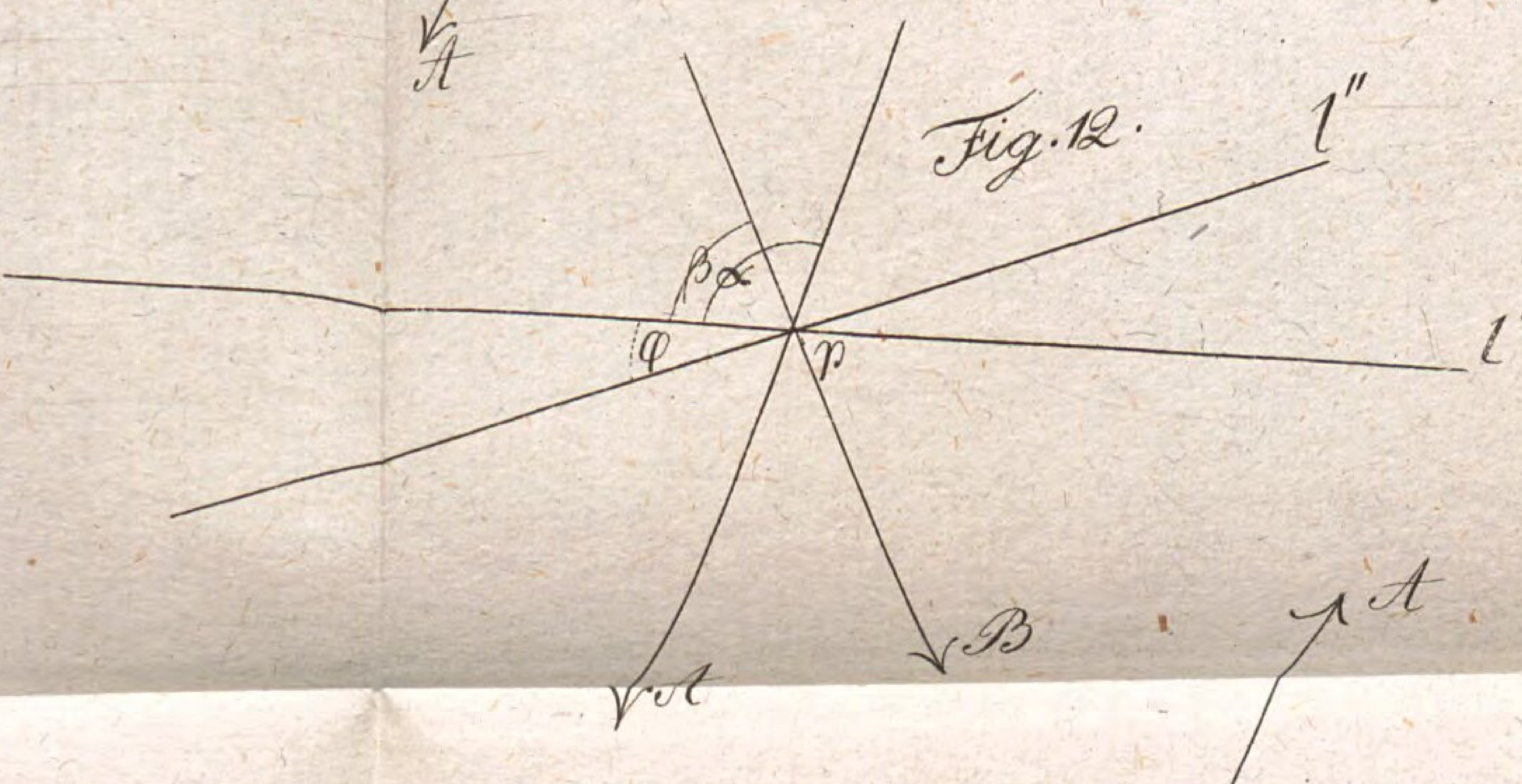


Fig. 12.

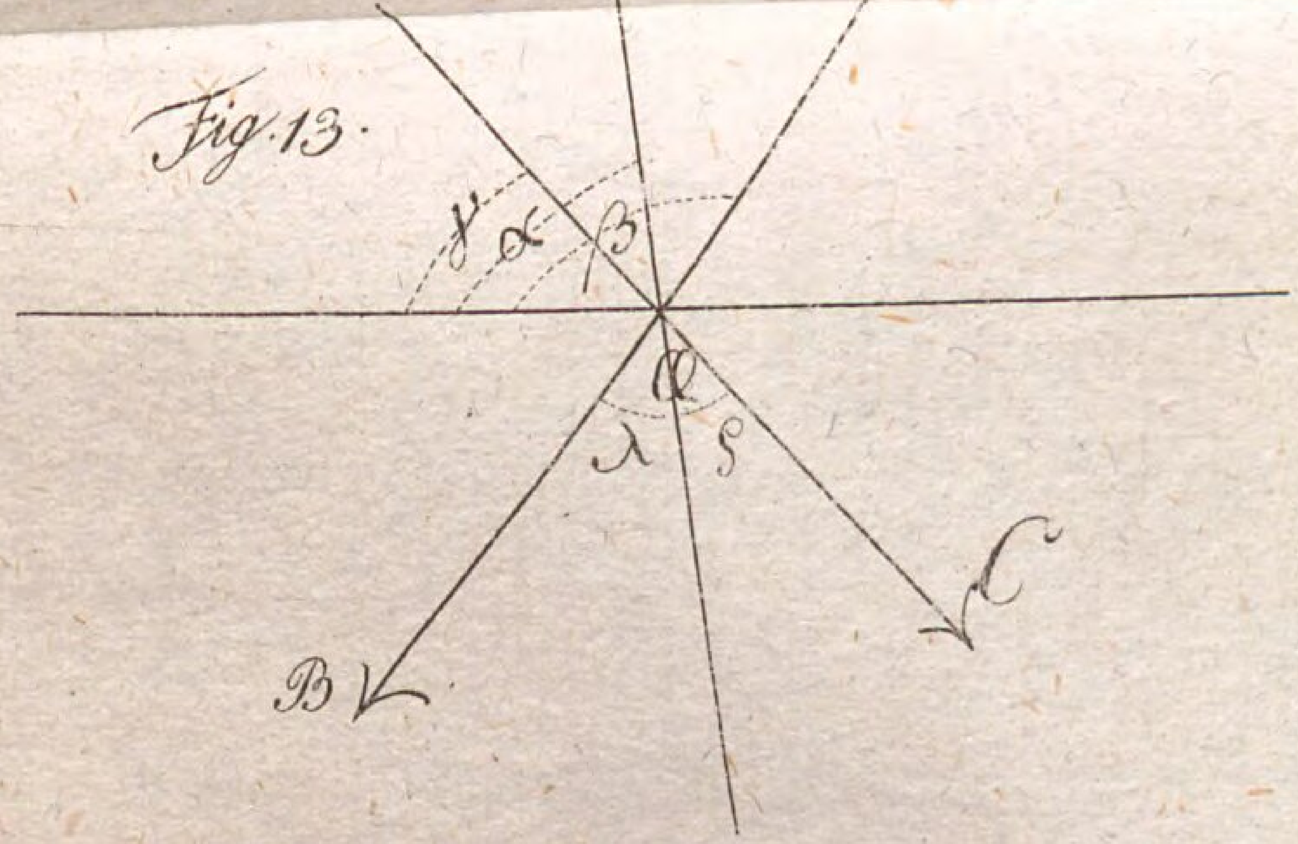


Fig. 13.

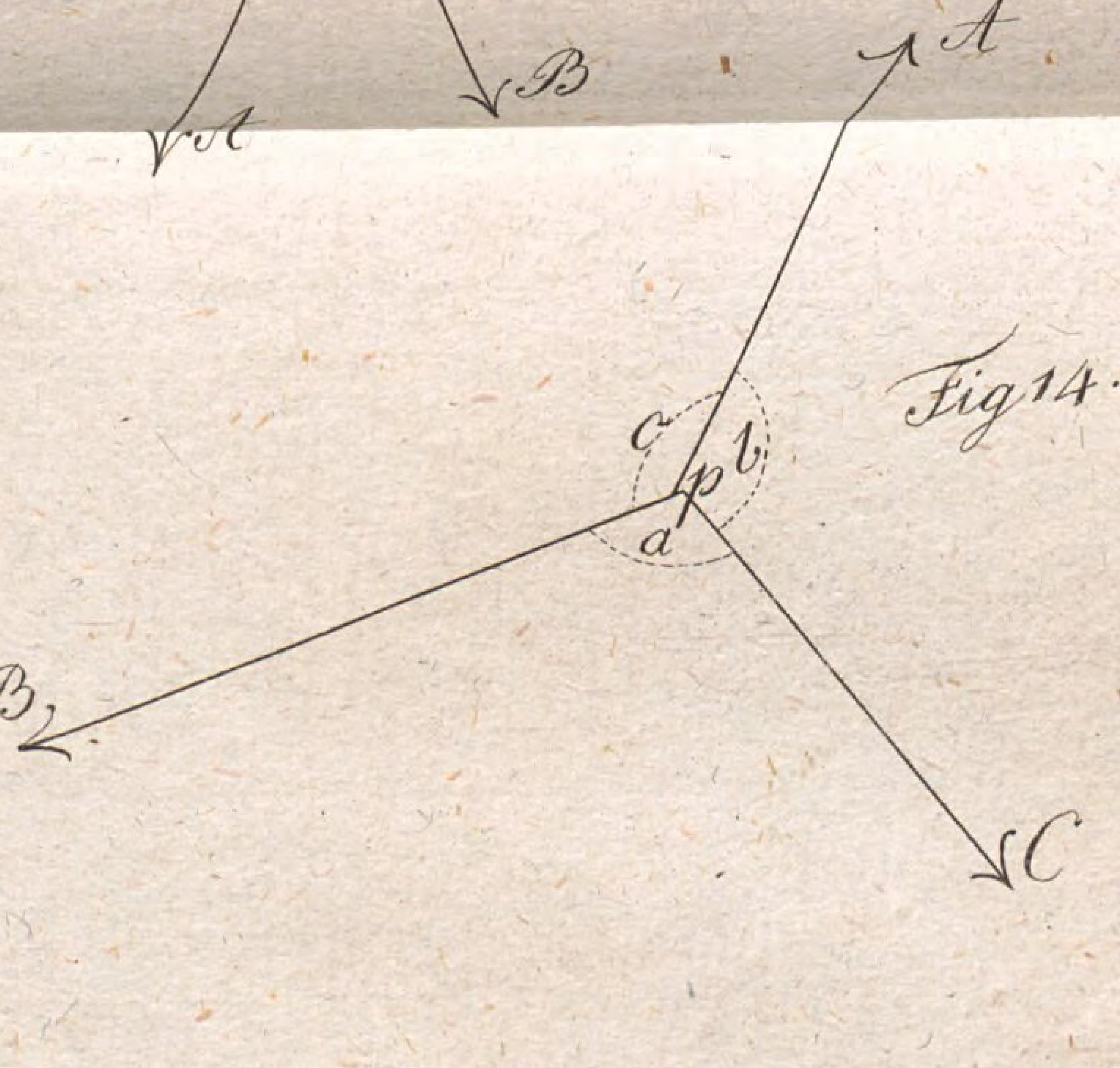


Fig. 14.

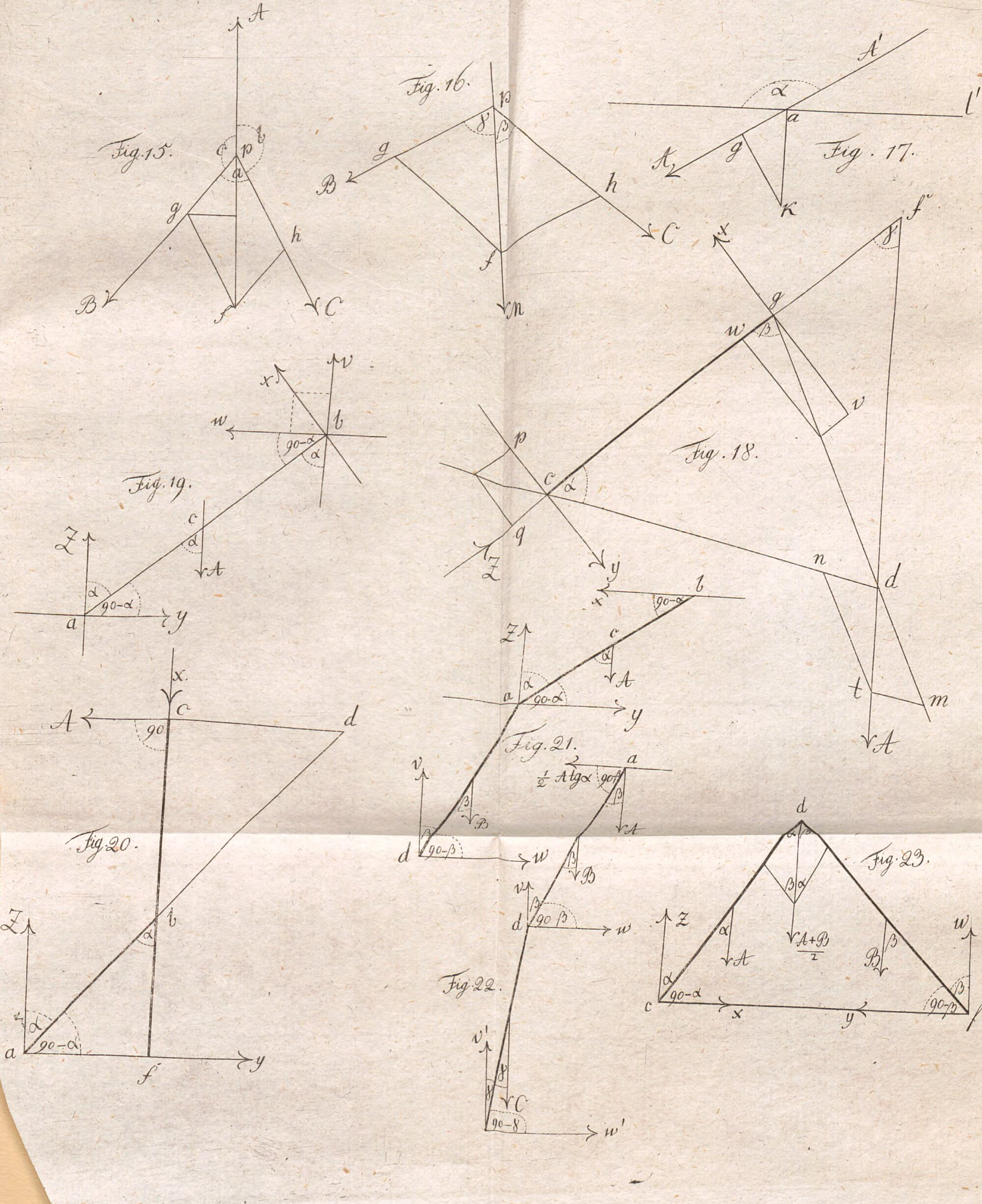


Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.

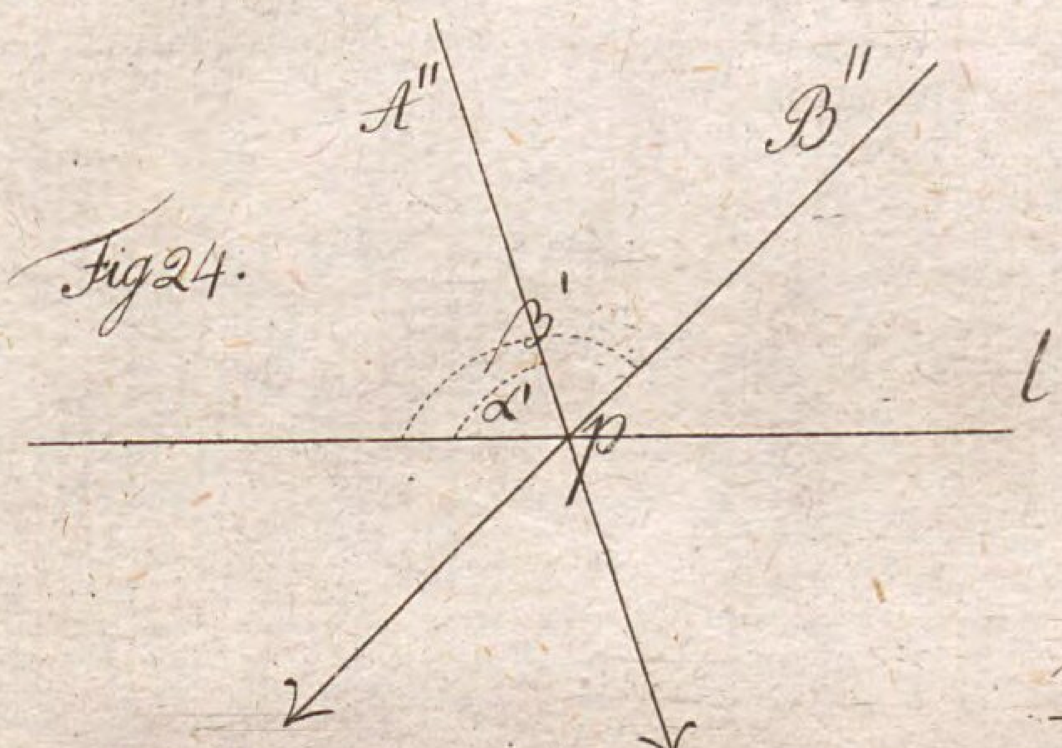


Fig. 24.

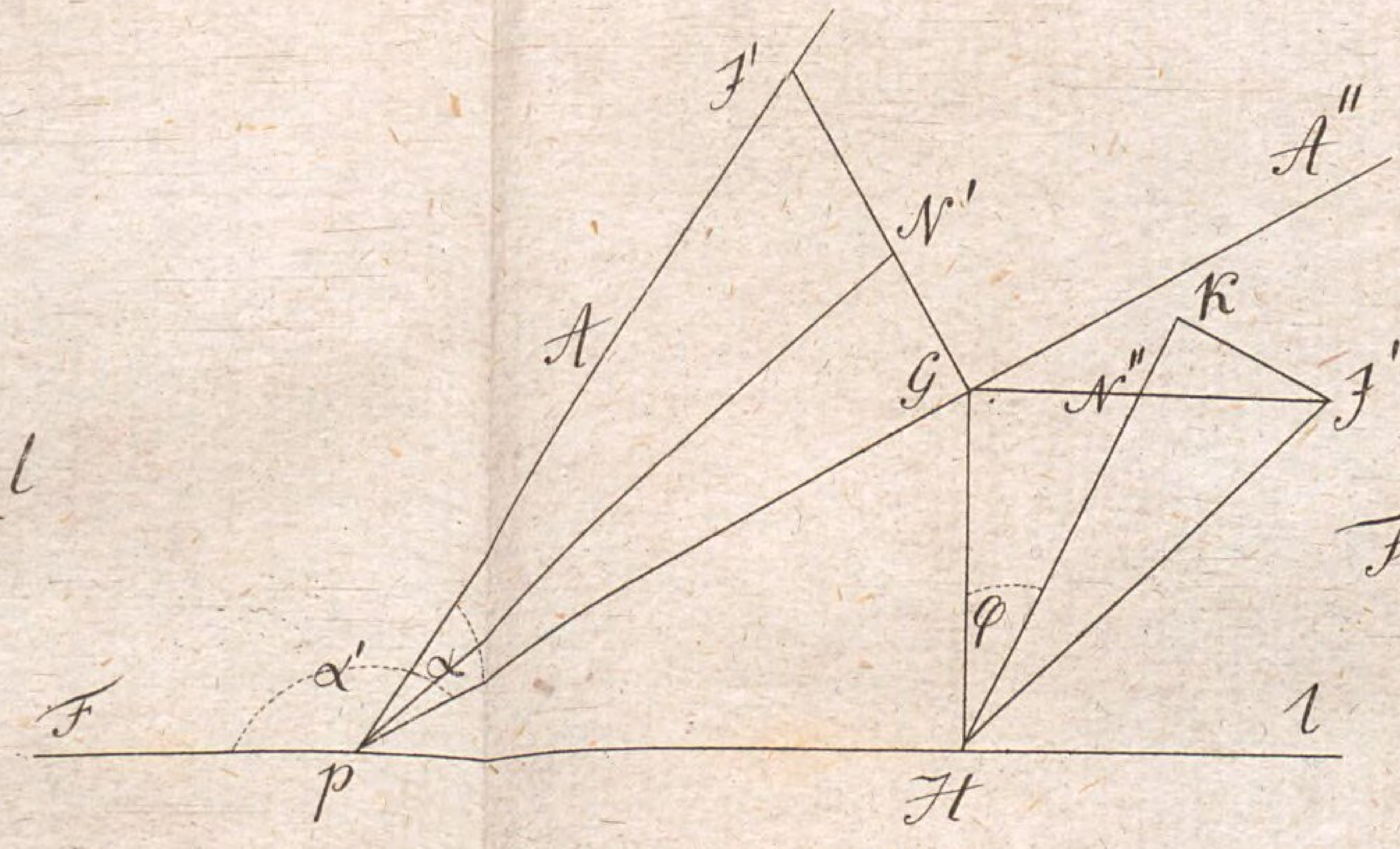


Fig. 25.

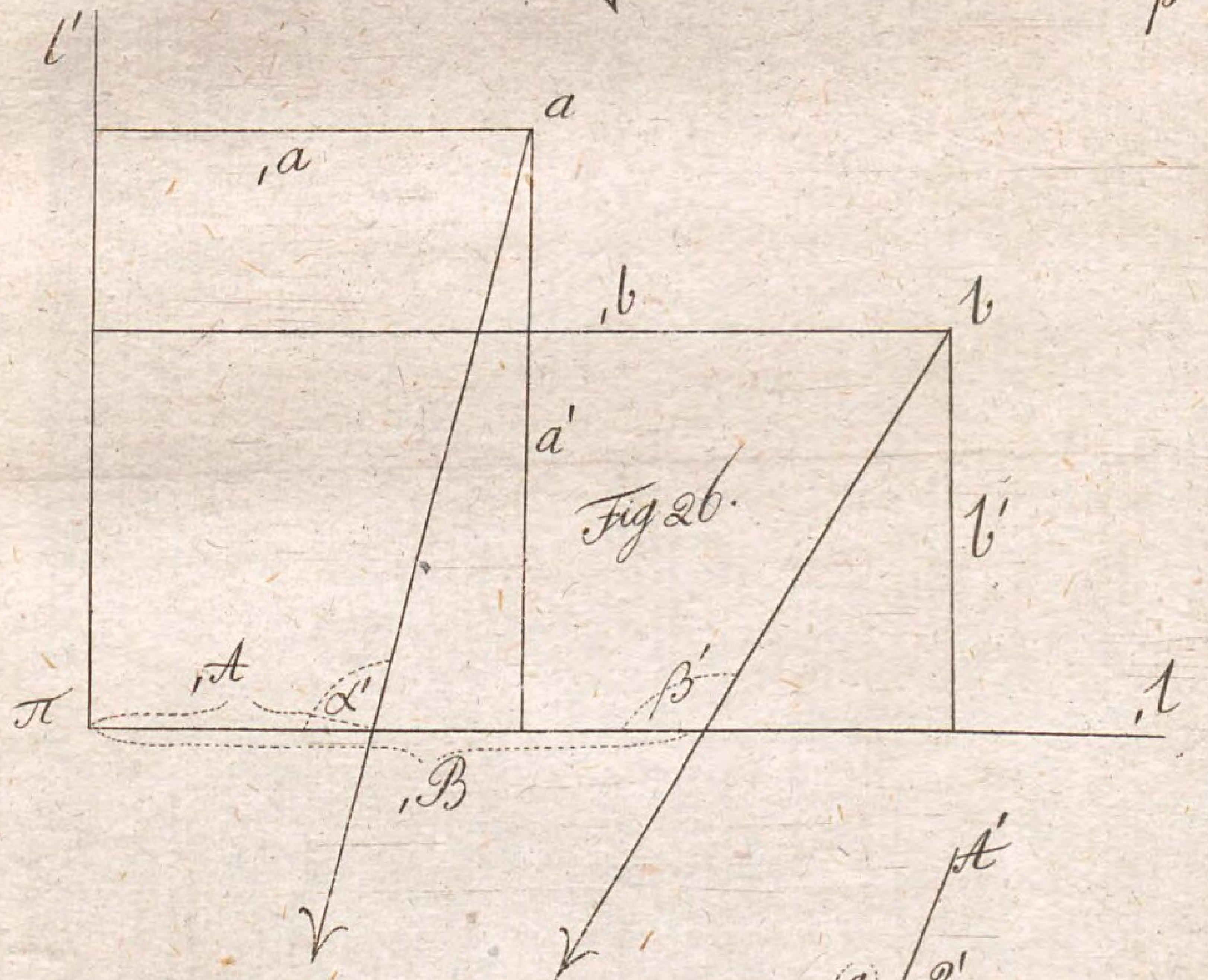


Fig. 26.

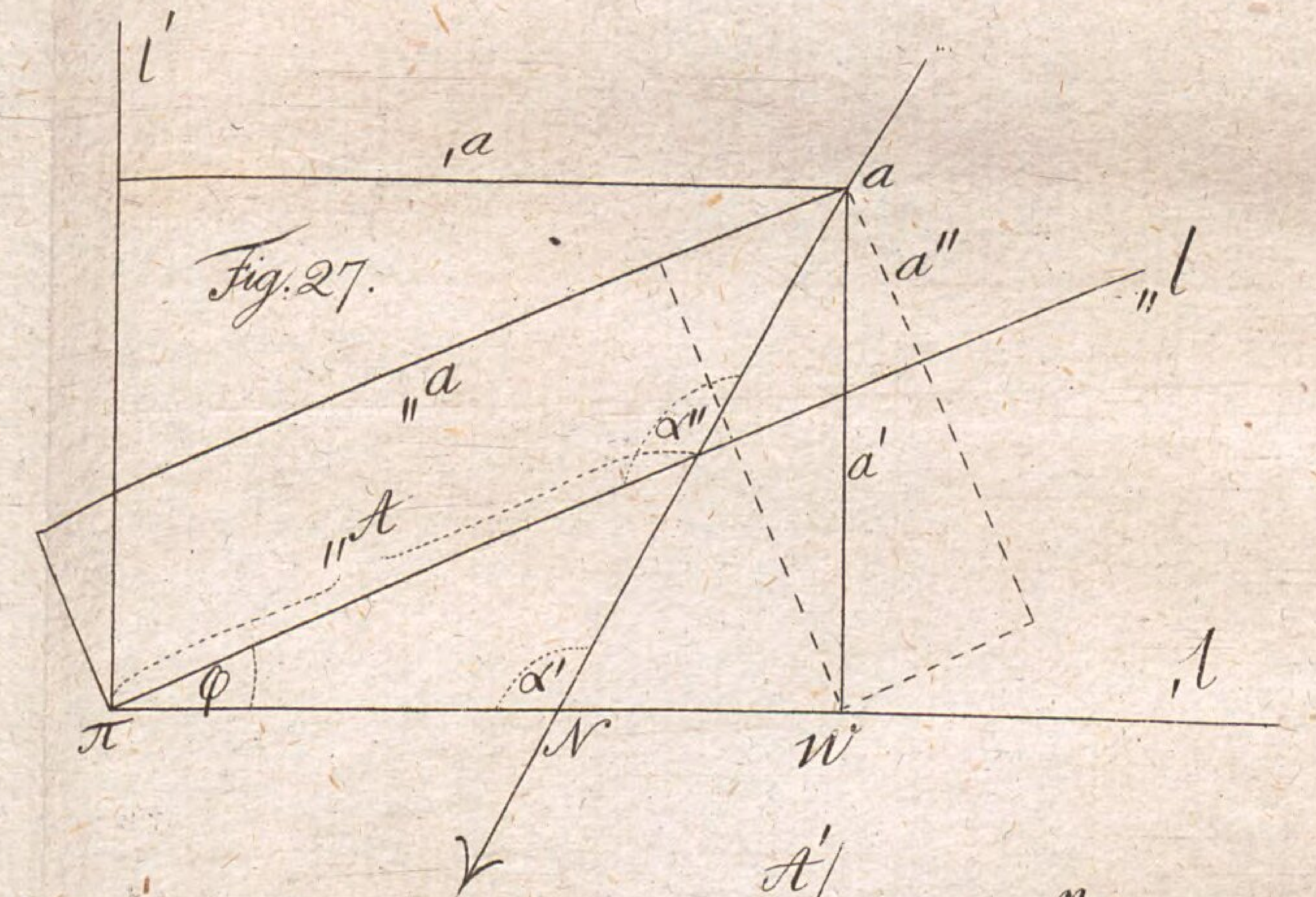


Fig. 27.

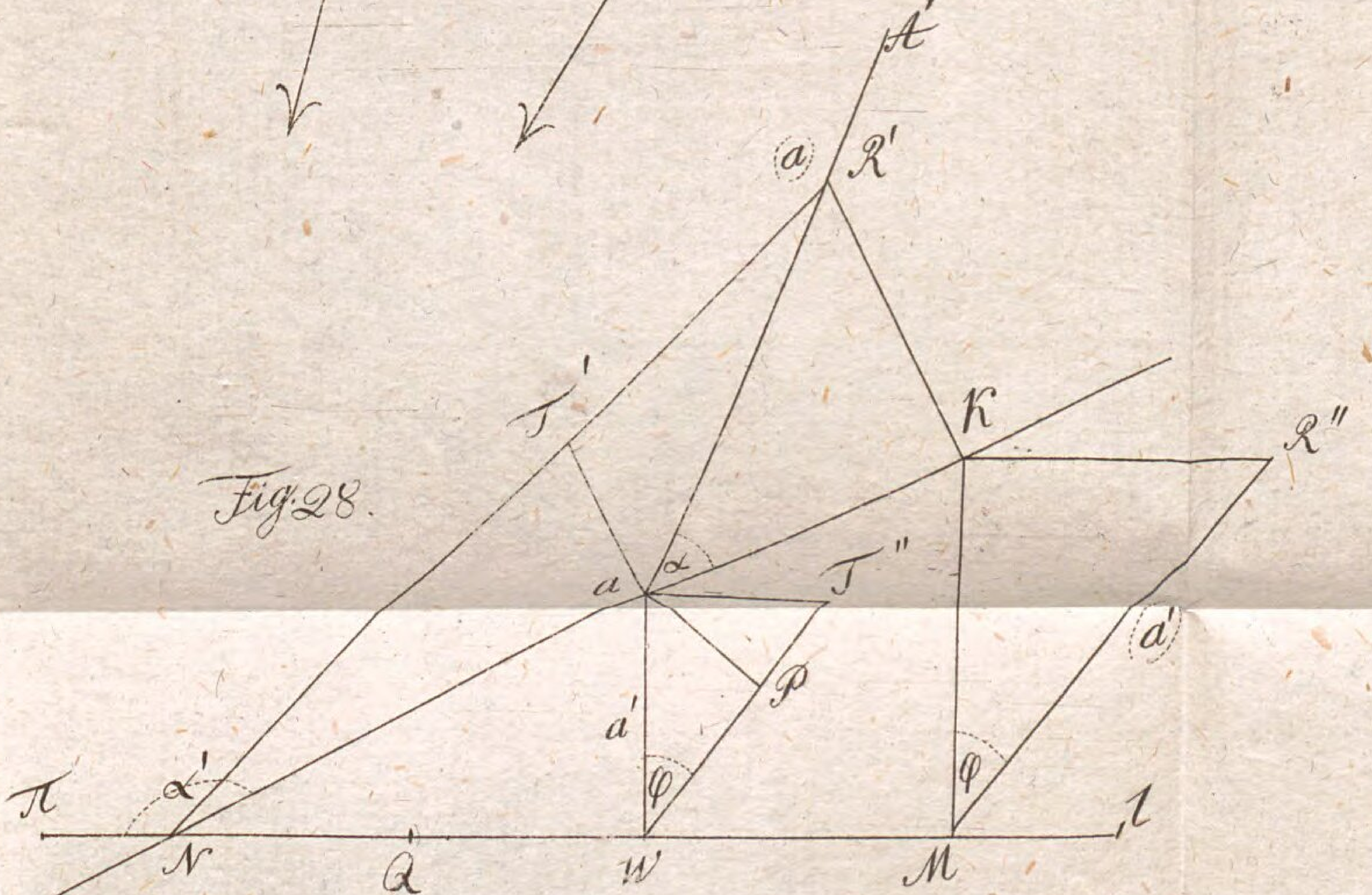


Fig. 28.

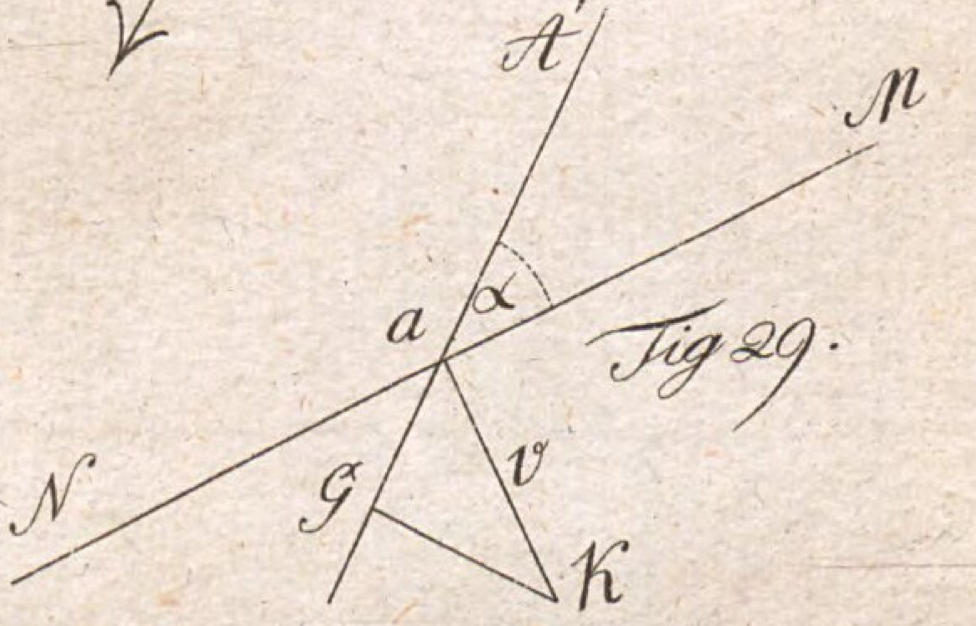


Fig. 29.

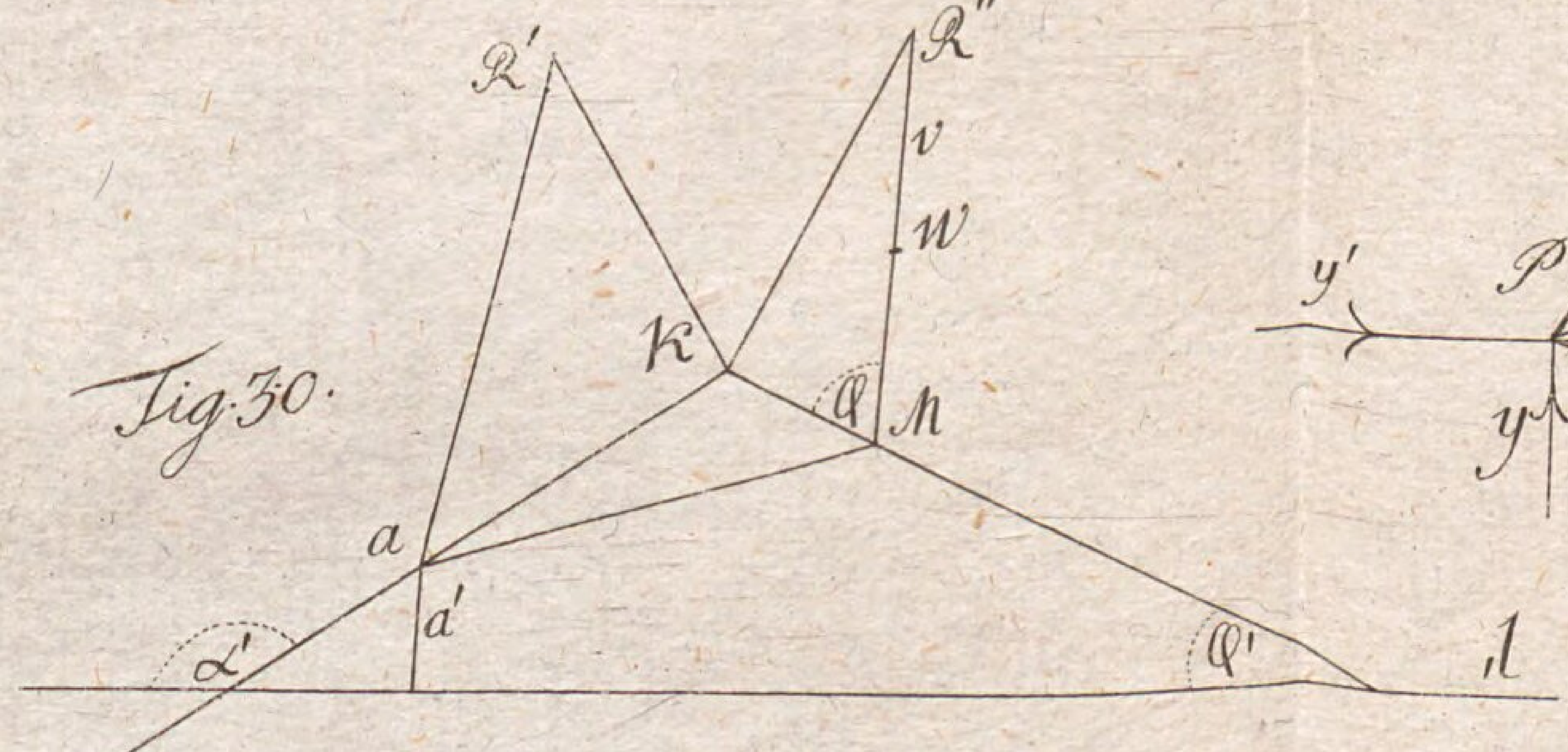


Fig. 30.

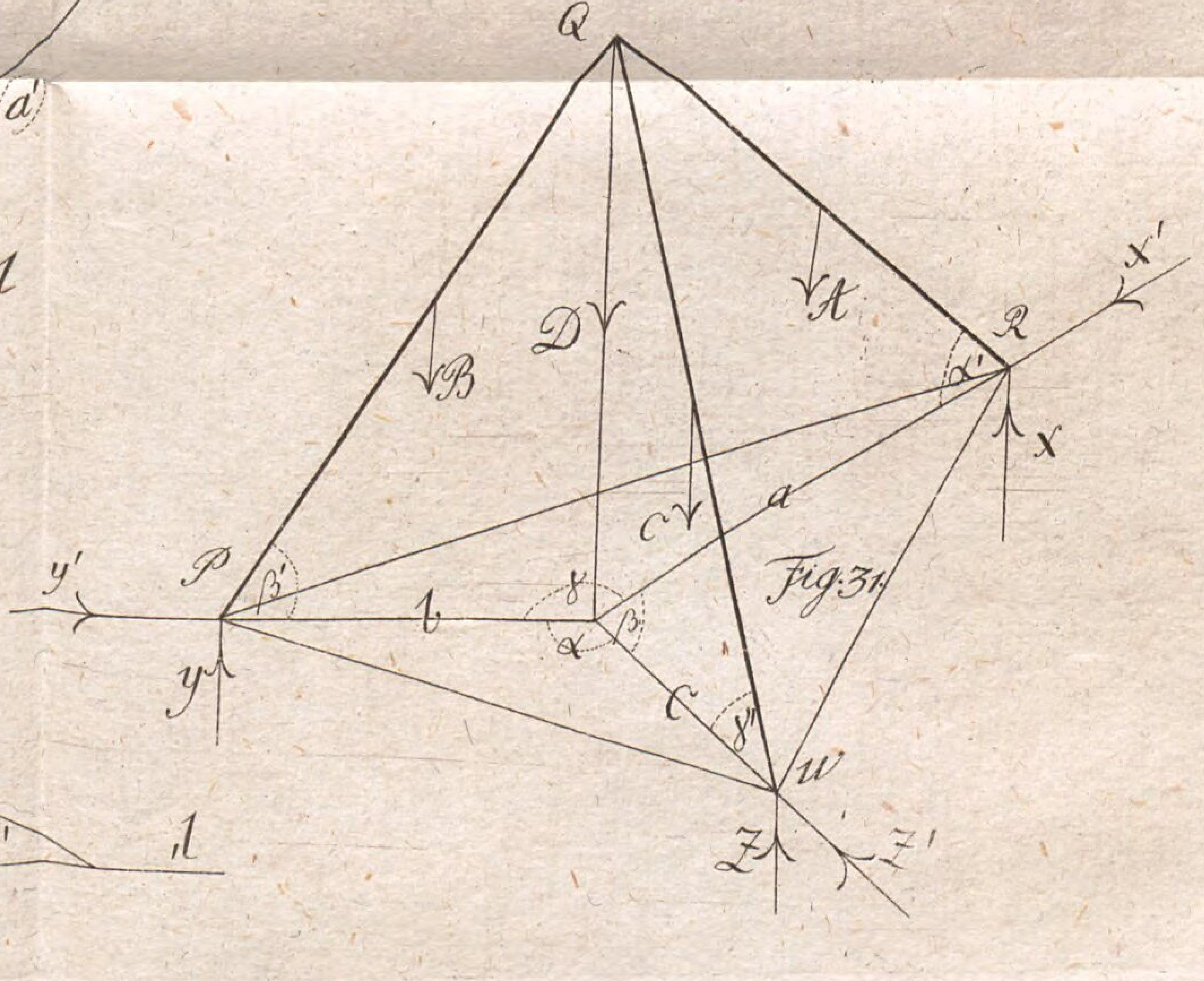


Fig. 31.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehmus, Daniel Christian Ludolph,

Lehrbuch der angewandten Mathematik

Bd.: Erstes Bändchen

Berlin 1818

Math.a. 154 h-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080893-8